

Table des matières

1	Introduction	1
2	Modèles	5
2.1	Équation de bilan	5
2.1.1	Trafic routier	6
2.1.2	Système de Saint Venant	8
2.1.3	Dynamique des gaz compressibles	11
2.2	Invariance Galiléenne	13
2.3	Coordonnées de Lagrange	15
2.3.1	Changement de coordonnées et lois de conservation	16
2.3.2	Dynamique des gaz lagrangienne en dimension un d'espace	19
2.3.3	Dynamique des gaz lagrangienne en dimension deux d'espace	20
2.3.4	Formulation de Hui	22
2.3.5	Dynamique des gaz lagrangienne en dimension trois d'espace	22
2.4	Système linéairement bien posé et hyperbolicité	23
2.4.1	Stabilité linéaire en dimension un d'espace	23
2.4.2	Stabilité linéaire en dimension supérieure	26
2.5	Exemples de calcul des vitesses d'onde	28
2.6	Exercices	34
2.7	Notes bibliographiques	36
3	Étude d'une loi de conservation	39
3.1	Solutions fortes et méthode des caractéristiques	40
3.2	Solutions faibles	44
3.3	Solutions faibles entropiques	47
3.3.1	Discontinuités entropiques	50
3.3.2	Choc et discontinuité de contact	53
3.3.3	Équation des détentes	54

VIII Table des matières

3.3.4	Solution entropique du problème de Riemann	56
3.3.5	Application et interprétation physique	57
3.4	Calcul numérique de solutions faibles entropiques	61
3.4.1	Notion de schéma conservatif	61
3.4.2	Schéma de Volumes Finis	64
3.4.3	Construction du flux à partir de la méthode des caractéristiques	64
3.4.4	Cas général	68
3.4.5	Définition d'un schéma générique	70
3.4.6	Convergence	72
3.4.7	Applications et analyse des résultats	74
3.5	Comparaison numérique choc-discontinuité de contact	78
3.6	Optimisation du schéma	79
3.6.1	Optimisation par rapport à la contrainte de stabilité	80
3.6.2	Optimisation par rapport à la précision	80
3.7	Schémas lagrangiens pour le trafic routier	81
3.7.1	Schéma lagrangien	82
3.7.2	Un résultat numérique	83
3.8	Exercices	84
3.9	Notes bibliographiques	86
4	Systèmes	87
4.1	Exemples	88
4.1.1	Système des eaux peu profondes	88
4.1.2	Système de la dynamique des gaz compressible	89
4.2	Entropie et variables entropiques	92
4.3	Solutions faibles entropiques	95
4.4	Solutions autosemblables en $\frac{x}{t}$	98
4.4.1	Discussion des détentes	99
4.4.2	Discussion des discontinuités	102
4.5	Retour sur la variable principale U	110
4.6	Solution du problème de Riemann	111
4.6.1	Théorème de Lax	112
4.6.2	Correspondance Euler-Lagrange	113
4.7	Systèmes en coordonnée de Lagrange	115
4.8	Systèmes à flux d'entropie nul	116
4.9	Vitesses d'ondes pour les systèmes lagrangiens	120
4.10	Enthalpie d'un système lagrangien	125
4.11	Exemples de systèmes lagrangiens	129
4.11.1	Le système de la magnétohydrodynamique idéale	129
4.11.2	Le modèle de l'hélium superfluide de Landau	134
4.11.3	Un modèle multiphasique	139
4.12	Chocs pour les systèmes lagrangiens	141
4.13	Exercices	142
4.14	Notes bibliographiques	148

5	Le système de la dynamique des gaz compressibles	149
5.1	Calcul des vitesses d'ondes	150
5.1.1	Détentes	153
5.1.2	Les discontinuités	154
5.1.3	Nombre de Mach	158
5.1.4	Problème de Riemann pour la dynamique des gaz	159
5.2	Discrétisation numérique	159
5.3	Schéma eulérien de Roe	162
5.3.1	Matrice de Roe pour la dynamique des gaz eulérienne	165
5.3.2	Propriétés du schéma de Roe	167
5.3.3	Résultats numériques	170
5.4	Schéma Lagrange+projection	173
5.4.1	Phase lagrangienne	174
5.4.2	Phase lagrangienne pour le système de la dynamique des gaz	176
5.4.3	Formule du flux lagrangien	179
5.4.4	Grille mobile durant la phase lagrangienne	180
5.4.5	Phase de projection	181
5.4.6	Synthèse	182
5.4.7	Conditions au bord	184
5.4.8	Résultats numériques	186
5.5	Schéma ALE en dimension un	187
5.5.1	Discrétisation numérique	188
5.5.2	Discrétisation de (5.46)	189
5.5.3	Discrétisation de (5.47)	189
5.5.4	Réécriture sur la grille mobile	190
5.5.5	Résultat numérique	192
5.6	Un résultat numérique en dimension deux d'espace	193
5.7	Exercices	194
5.8	Notes bibliographiques	197
6	Solveurs lagrangiens à un état et à deux états	199
6.1	Solution du problème de Riemann linéarisé	200
6.1.1	Solution à un état intermédiaire	201
6.1.2	Solution à deux états	203
6.2	Discrétisation numérique	206
6.2.1	Autre mode de construction du flux numérique	206
6.2.2	Propriété entropique	211
6.2.3	Optimisation par rapport au pas de temps	213
6.2.4	Optimisation par rapport à la simplicité de mise en oeuvre	216
6.3	Exercices	218
6.4	Notes bibliographiques	219

X Table des matières

7	Systèmes lagrangiens multidimensionnels	221
7.1	Cadre théorique	221
7.2	Inégalité entropique discrète	222
7.3	Stabilité L^2	225
7.4	Dynamique des gaz en géométrie cylindrique ou sphérique	226
7.5	MHD en dimension supérieure	230
7.6	Dynamique des gaz lagrangienne	236
7.6.1	Maillage mobile	238
7.6.2	Tentative de construction d'un schéma numérique	243
7.6.3	Une première solution	246
7.6.4	Une deuxième solution	248
7.6.5	Une troisième solution	254
7.6.6	Un schéma lagrangien sur grilles décalées	256
7.6.7	Choix du maillage pour un calcul donné	260
7.6.8	Gravité et équilibre hydrostatique	263
7.6.9	Convergence	271
7.7	Exercices	273
7.8	Notes bibliographiques	274
Littérature		277
Index		283