

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Grundlagen</b>	<b>17</b>
1.1 Logik und Mengen . . . . .	17
1.1.1 Aussagenlogik . . . . .	17
1.1.2 Mengen . . . . .	20
1.2 Zahlen . . . . .	23
1.2.1 Natürliche Zahlen . . . . .	23
1.2.2 Ganze Zahlen . . . . .	24
1.2.3 Rationale Zahlen . . . . .	25
1.2.4 Reelle Zahlen . . . . .	26
1.2.5 Ordnung . . . . .	28
1.2.6 Intervalle . . . . .	29
1.2.7 Betrag und Signum . . . . .	30
1.2.8 Summe und Produkt . . . . .	33
1.3 Potenz und Wurzel . . . . .	34
1.3.1 Potenzen . . . . .	34
1.3.2 Potenzgesetze . . . . .	35
1.3.3 Wurzeln . . . . .	35
1.3.4 Binomischer Satz . . . . .	36
1.4 Trigonometrie . . . . .	38
1.4.1 Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck . . . . .	38
1.4.2 Winkel im Grad- und Bogenmaß . . . . .	40
1.4.3 Sinus- und Kosinussatz . . . . .	41
1.5 Gleichungen und Ungleichungen . . . . .	42
1.5.1 Lineare Gleichungen . . . . .	43
1.5.2 Potenzgleichungen . . . . .	44
1.5.3 Quadratische Gleichungen . . . . .	44
1.5.4 Wurzelgleichungen . . . . .	46
1.5.5 Ungleichungen . . . . .	47
1.6 Beweise . . . . .	49
1.6.1 Direkter Beweis . . . . .	50
1.6.2 Indirekter Beweis . . . . .	50
1.6.3 Konstruktiver Beweis . . . . .	51
1.6.4 Vollständige Induktion . . . . .	52
1.7 Aufgaben . . . . .	53
<b>2 Lineare Gleichungssysteme</b>	<b>55</b>
2.1 Einführung . . . . .	55

2.2	Gauß-Algorithmus . . . . .	57
2.2.1	Äquivalenzumformungen . . . . .	58
2.2.2	Vorwärtselimination . . . . .	59
2.2.3	Rückwärtseinsetzen . . . . .	60
2.2.4	Gaußsches Eliminationsverfahren . . . . .	61
2.2.5	Rechenschema . . . . .	62
2.3	Spezielle Typen linearer Gleichungssysteme . . . . .	64
2.3.1	Lineare Gleichungssysteme ohne Lösung . . . . .	64
2.3.2	Lineare Gleichungssysteme mit unendlich vielen Lösungen . . . . .	65
2.3.3	Systeme mit redundanten Gleichungen . . . . .	66
2.3.4	Unterbestimmte lineare Gleichungssysteme . . . . .	67
2.3.5	Überbestimmte lineare Gleichungssysteme . . . . .	68
2.3.6	Homogene lineare Gleichungssysteme . . . . .	69
2.3.7	Lineare Gleichungssysteme mit Parametern . . . . .	71
2.4	Numerische Verfahren . . . . .	73
2.4.1	Jakobi-Iteration . . . . .	73
2.4.2	Gauß-Seidel-Iteration . . . . .	74
2.5	Anwendungen . . . . .	75
2.5.1	Produktion . . . . .	75
2.5.2	Netzwerkanalyse in der Elektrotechnik . . . . .	76
2.6	Aufgaben . . . . .	77
<b>3</b>	<b>Vektoren</b> . . . . .	<b>79</b>
3.1	Der Begriff eines Vektors . . . . .	79
3.2	Vektorrechnung ohne Koordinaten . . . . .	81
3.2.1	Addition und Subtraktion . . . . .	81
3.2.2	Skalare Multiplikation . . . . .	83
3.2.3	Skalarprodukt . . . . .	84
3.2.4	Vektorprodukt . . . . .	88
3.2.5	Spatprodukt . . . . .	91
3.2.6	Lineare Abhängigkeit und Komponentenzerlegung . . . . .	93
3.3	Vektoren in Koordinatendarstellung . . . . .	95
3.3.1	Koordinatendarstellung . . . . .	96
3.3.2	Addition und Subtraktion . . . . .	97
3.3.3	Skalare Multiplikation . . . . .	98
3.3.4	Skalarprodukt . . . . .	98
3.3.5	Vektorprodukt . . . . .	100
3.3.6	Spatprodukt . . . . .	102
3.3.7	Lineare Abhängigkeit und Komponentenzerlegung . . . . .	102
3.4	Punkte, Geraden und Ebenen . . . . .	104
3.4.1	Kartesisches Koordinatensystem . . . . .	104
3.4.2	Parameterdarstellung von Geraden und Ebenen . . . . .	106
3.4.3	Parameterfreie Darstellung von Geraden und Ebenen . . . . .	108
3.4.4	Schnitte von Geraden und Ebenen . . . . .	109
3.4.5	Abstände . . . . .	111

3.4.6 Winkel . . . . .	114
3.5 Anwendungen . . . . .	116
3.5.1 Kraft . . . . .	116
3.5.2 Arbeit . . . . .	116
3.5.3 Drehmoment . . . . .	117
3.6 Aufgaben . . . . .	118
<b>4 Matrizen</b> . . . . .	<b>123</b>
4.1 Der Begriff einer Matrix . . . . .	123
4.2 Rechnen mit Matrizen . . . . .	127
4.2.1 Addition, Subtraktion und skalare Multiplikation . . . . .	128
4.2.2 Multiplikation von Matrizen . . . . .	129
4.3 Determinanten . . . . .	135
4.3.1 Determinante einer (2,2)-Matrix . . . . .	135
4.3.2 Determinante einer (3,3)-Matrix . . . . .	137
4.3.3 Determinante einer (n,n)-Matrix . . . . .	141
4.4 Inverse Matrix . . . . .	144
4.4.1 Invertierbare Matrizen . . . . .	145
4.4.2 Inverse einer (2,2)-Matrix . . . . .	146
4.4.3 Inverse Matrix und lineares Gleichungssystem . . . . .	146
4.5 Lineare Abbildungen . . . . .	147
4.5.1 Matrizen als Abbildungen . . . . .	147
4.5.2 Kern, Bild und Rang . . . . .	149
4.6 Eigenwerte und Eigenvektoren . . . . .	150
4.7 Numerische Verfahren . . . . .	155
4.8 Anwendungen . . . . .	156
4.9 Aufgaben . . . . .	158
<b>5 Funktionen</b> . . . . .	<b>161</b>
5.1 Einführung . . . . .	161
5.1.1 Begriff der Funktion . . . . .	161
5.1.2 Wertetabelle . . . . .	164
5.1.3 Schaubild . . . . .	164
5.1.4 Explizite und implizite Darstellung . . . . .	166
5.1.5 Abschnittsweise definierte Funktionen . . . . .	167
5.1.6 Funktionsschar . . . . .	168
5.1.7 Verkettung von Funktionen . . . . .	169
5.2 Polynome und rationale Funktionen . . . . .	173
5.2.1 Potenzfunktionen mit ganzen Hochzahlen . . . . .	173
5.2.2 Polynome . . . . .	175
5.2.3 Gebrochenrationale Funktionen . . . . .	182
5.3 Eigenschaften . . . . .	190
5.3.1 Symmetrie . . . . .	190
5.3.2 Periode . . . . .	194
5.3.3 Monotonie . . . . .	195
5.3.4 Beschränktheit . . . . .	196

5.4	Sinus, Kosinus und Tangens . . . . .	197
5.4.1	Definition am Einheitskreis . . . . .	197
5.4.2	Eigenschaften . . . . .	199
5.4.3	Allgemeine Sinus- und Kosinusfunktion . . . . .	201
5.5	Grenzwert und Stetigkeit . . . . .	203
5.5.1	Zahlenfolgen . . . . .	204
5.5.2	Grenzwert einer Funktion . . . . .	210
5.5.3	Stetigkeit . . . . .	212
5.5.4	Asymptotisches Verhalten . . . . .	217
5.6	Exponential- und Hyperbelfunktionen . . . . .	221
5.6.1	Exponentialfunktionen . . . . .	221
5.6.2	Die e-Funktion . . . . .	223
5.6.3	Hyperbelfunktionen . . . . .	225
5.7	Umkehrfunktionen . . . . .	228
5.7.1	Das Prinzip der Umkehrfunktion . . . . .	228
5.7.2	Wurzelfunktionen . . . . .	230
5.7.3	Arkusfunktionen . . . . .	231
5.7.4	Logarithmusfunktionen . . . . .	235
5.7.5	Area-Funktionen . . . . .	238
5.8	Numerische Verfahren . . . . .	239
5.8.1	Berechnung von Funktionswerten . . . . .	239
5.8.2	Bisektionsverfahren . . . . .	240
5.9	Anwendungen . . . . .	242
5.9.1	Messwerte . . . . .	242
5.9.2	Industrieroboter . . . . .	244
5.10	Aufgaben . . . . .	245
<b>6</b>	<b>Differenzialrechnung</b> . . . . .	<b>251</b>
6.1	Steigung und Ableitungsfunktion . . . . .	251
6.1.1	Tangente und Differenzierbarkeit . . . . .	251
6.1.2	Differenzial . . . . .	255
6.1.3	Ableitungsfunktion . . . . .	255
6.1.4	Mittelwertsatz der Differenzialrechnung . . . . .	259
6.1.5	Höhere Ableitungen . . . . .	260
6.2	Ableitungstechnik . . . . .	261
6.2.1	Ableitungsregeln . . . . .	261
6.2.2	Ableitung der Umkehrfunktion . . . . .	266
6.2.3	Logarithmisches Differenzieren . . . . .	268
6.2.4	Implizites Differenzieren . . . . .	269
6.2.5	Zusammenfassung . . . . .	270
6.3	Regel von Bernoulli-de l'Hospital . . . . .	271
6.4	Geometrische Bedeutung der Ableitungen . . . . .	275
6.4.1	Neigungswinkel und Schnittwinkel . . . . .	275
6.4.2	Monotonie . . . . .	277
6.4.3	Krümmung . . . . .	278

6.4.4	Lokale Extrema . . . . .	279
6.4.5	Wendepunkte . . . . .	283
6.4.6	Globale Extrema . . . . .	284
6.5	Numerische Verfahren . . . . .	285
6.5.1	Numerische Differenziation . . . . .	286
6.5.2	Newton-Verfahren . . . . .	287
6.5.3	Sekantenverfahren . . . . .	289
6.6	Anwendungen . . . . .	290
6.6.1	Fehlerrechnung . . . . .	290
6.6.2	Extremwertaufgaben . . . . .	292
6.6.3	Momentan- und Durchschnittsgeschwindigkeit . . . . .	294
6.7	Aufgaben . . . . .	295
<b>7</b>	<b>Integralrechnung</b>	<b>301</b>
7.1	Flächenproblem . . . . .	301
7.1.1	Integralsymbol . . . . .	301
7.1.2	Integral als Grenzwert von Summen . . . . .	302
7.1.3	Bestimmtes Integral . . . . .	304
7.2	Zusammenhang von Ableitung und Integral . . . . .	305
7.2.1	Integralfunktion . . . . .	305
7.2.2	Stammfunktion . . . . .	307
7.2.3	Bestimmtes Integral und Stammfunktion . . . . .	309
7.2.4	Mittelwertsatz der Integralrechnung . . . . .	310
7.3	Integrationstechnik . . . . .	312
7.3.1	Integrationsregeln . . . . .	312
7.3.2	Integration durch Substitution . . . . .	316
7.3.3	Partielle Integration . . . . .	323
7.3.4	Gebrochenrationale Funktionen . . . . .	325
7.3.5	Uneigentliche Integrale . . . . .	328
7.4	Länge, Flächeninhalt und Volumen . . . . .	331
7.4.1	Flächeninhalte . . . . .	331
7.4.2	Bogenlänge . . . . .	333
7.4.3	Rotationskörper . . . . .	335
7.5	Numerische Verfahren . . . . .	339
7.5.1	Trapezregel . . . . .	340
7.5.2	Romberg-Verfahren . . . . .	342
7.6	Anwendungen . . . . .	342
7.6.1	Effektivwert . . . . .	342
7.6.2	Schwerpunkte und statische Momente ebener Flächen . . . . .	343
7.7	Aufgaben . . . . .	347
<b>8</b>	<b>Potenzreihen</b>	<b>351</b>
8.1	Unendliche Reihen . . . . .	352
8.2	Potenzreihen und Konvergenz . . . . .	356
8.3	Taylor-Reihen . . . . .	357
8.4	Eigenschaften . . . . .	359

---

8.5 Numerische Verfahren . . . . .	365
8.6 Anwendungen . . . . .	366
8.7 Aufgaben . . . . .	367
<b>9 Kurven</b>	<b>369</b>
9.1 Parameterdarstellung . . . . .	369
9.2 Kegelschnitte . . . . .	372
9.3 Tangente . . . . .	378
9.4 Krümmung . . . . .	380
9.5 Bogenlänge . . . . .	383
9.6 Numerische Verfahren . . . . .	385
9.7 Anwendungen . . . . .	387
9.7.1 Mechanik . . . . .	387
9.7.2 Straßenbau . . . . .	388
9.8 Aufgaben . . . . .	390
<b>10 Funktionen mit mehreren Variablen</b>	<b>393</b>
10.1 Definition und Darstellung . . . . .	393
10.1.1 Definition einer Funktion mit mehreren Variablen . . . . .	393
10.1.2 Schaubild einer Funktion mit mehreren Variablen . . . . .	394
10.1.3 Schnittkurven mit Ebenen und Höhenlinien . . . . .	394
10.2 Grenzwert und Stetigkeit . . . . .	398
10.2.1 Grenzwert einer Funktion mit mehreren Variablen . . . . .	398
10.2.2 Stetigkeit . . . . .	399
10.3 Differenziation . . . . .	400
10.3.1 Partielle Ableitungen und partielle Differenzierbarkeit . . . . .	400
10.3.2 Differenzierbarkeit und Tangentialebene . . . . .	403
10.3.3 Gradient und Richtungsableitung . . . . .	405
10.3.4 Differenzial . . . . .	408
10.3.5 Höhere partielle Ableitungen . . . . .	411
10.3.6 Extremwerte . . . . .	413
10.4 Ausgleichsrechnung . . . . .	415
10.4.1 Methode der kleinsten Fehlerquadrate . . . . .	415
10.4.2 Ausgleichsrechnung mit Polynomen . . . . .	416
10.4.3 Lineare Ausgleichsrechnung . . . . .	420
10.5 Vektorwertige Funktionen . . . . .	422
10.6 Numerische Verfahren . . . . .	423
10.6.1 Mehrdimensionales Newton-Verfahren . . . . .	423
10.6.2 Gradientenverfahren . . . . .	425
10.7 Anwendungen . . . . .	427
10.8 Aufgaben . . . . .	429
<b>11 Komplexe Zahlen und Funktionen</b>	<b>431</b>
11.1 Definition und Darstellung . . . . .	431
11.1.1 Komplexe Zahlen . . . . .	431
11.1.2 Gaußsche Zahlenebene . . . . .	432

11.1.3 Polarkoordinaten . . . . .	433
11.1.4 Exponentialform . . . . .	435
11.2 Rechenregeln . . . . .	437
11.2.1 Gleichheit . . . . .	437
11.2.2 Addition und Subtraktion . . . . .	437
11.2.3 Multiplikation und Division . . . . .	438
11.2.4 Rechnen mit der konjugiert komplexen Zahl . . . . .	440
11.2.5 Rechnen mit dem Betrag einer komplexen Zahl . . . . .	440
11.3 Potenzen, Wurzeln und Polynome . . . . .	442
11.3.1 Potenzen . . . . .	443
11.3.2 Wurzeln . . . . .	443
11.3.3 Fundamentalsatz der Algebra . . . . .	446
11.4 Komplexe Funktionen . . . . .	448
11.4.1 Ortskurven . . . . .	449
11.4.2 Harmonische Schwingungen . . . . .	450
11.4.3 Transformationen . . . . .	454
11.5 Anwendungen . . . . .	458
11.6 Aufgaben . . . . .	459
<b>12 Gewöhnliche Differenzialgleichungen</b> . . . . .	<b>461</b>
12.1 Einführung . . . . .	461
12.1.1 Grundbegriffe . . . . .	461
12.1.2 Anfangswert- und Randwertproblem . . . . .	464
12.1.3 Richtungsfeld und Orthogonaltrajektorie . . . . .	466
12.1.4 Differenzialgleichung und Funktionenschar . . . . .	468
12.2 Differenzialgleichungen erster Ordnung . . . . .	469
12.2.1 Separation der Variablen . . . . .	470
12.2.2 Lineare Substitution . . . . .	472
12.2.3 Ähnlichkeitsdifferenzialgleichungen . . . . .	473
12.3 Lineare Differenzialgleichungen . . . . .	474
12.3.1 Homogene und inhomogene lineare Differenzialgleichungen . . . . .	474
12.3.2 Lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung . . . . .	477
12.3.3 Allgemeine Eigenschaften . . . . .	481
12.3.4 Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . . .	484
12.4 Schwingungsdifferenzialgleichungen . . . . .	497
12.4.1 Allgemeine Form . . . . .	497
12.4.2 Freie Schwingung . . . . .	498
12.4.3 Harmonisch angeregte Schwingung . . . . .	500
12.4.4 Frequenzgänge . . . . .	504
12.5 Differenzialgleichungssysteme . . . . .	506
12.5.1 Eliminationsverfahren . . . . .	506
12.5.2 Zustandsvariablen . . . . .	508
12.5.3 Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten . . . . .	510
12.5.4 Lineare Differenzialgleichung als System . . . . .	516
12.5.5 Stabilität . . . . .	518

12.6 Numerische Verfahren . . . . .	522
12.6.1 Polygonzugverfahren von Euler . . . . .	522
12.6.2 Euler-Verfahren für Differenzialgleichungssysteme . . . . .	524
12.7 Anwendungen . . . . .	525
12.7.1 Temperaturverlauf . . . . .	525
12.7.2 Radioaktiver Zerfall . . . . .	525
12.7.3 Freier Fall mit Luftwiderstand . . . . .	526
12.7.4 Feder-Masse-Schwinger . . . . .	527
12.7.5 Pendel . . . . .	528
12.7.6 Wechselstromkreise . . . . .	528
12.8 Aufgaben . . . . .	531
<b>13 Fourier-Reihen</b> . . . . .	<b>535</b>
13.1 Fourier-Analyse . . . . .	535
13.1.1 Periodische Funktionen . . . . .	535
13.1.2 Trigonometrische Polynome . . . . .	537
13.1.3 Fourier-Reihe . . . . .	539
13.1.4 Satz von Fourier . . . . .	540
13.1.5 Gibbssches Phänomen . . . . .	543
13.2 Komplexe Darstellung . . . . .	545
13.2.1 Komplexe Fourier-Reihe . . . . .	545
13.2.2 Berechnung komplexer Fourier-Koeffizienten . . . . .	547
13.2.3 Spektrum . . . . .	549
13.2.4 Minimaleigenschaft . . . . .	552
13.3 Eigenschaften . . . . .	554
13.3.1 Symmetrie . . . . .	554
13.3.2 Integrationsintervall . . . . .	555
13.3.3 Mittelwert . . . . .	556
13.3.4 Linearität . . . . .	556
13.3.5 Ähnlichkeit und Zeitumkehr . . . . .	558
13.3.6 Zeitverschiebung . . . . .	559
13.4 Aufgaben . . . . .	561
<b>14 Verallgemeinerte Funktionen</b> . . . . .	<b>563</b>
14.1 Heaviside-Funktion . . . . .	563
14.2 Dirac-Distribution . . . . .	565
14.3 Verallgemeinerte Ableitung . . . . .	567
14.4 Faltung . . . . .	569
14.5 Aufgaben . . . . .	572
<b>15 Fourier-Transformation</b> . . . . .	<b>573</b>
15.1 Integraltransformation . . . . .	573
15.1.1 Definition . . . . .	573
15.1.2 Darstellung mit Real- und Imaginärteil . . . . .	575
15.1.3 Sinus- und Kosinustransformation . . . . .	577
15.1.4 Transformation gerader und ungerader Funktionen . . . . .	578

15.1.5 Darstellung mit Amplitude und Phase . . . . .	580
15.2 Eigenschaften . . . . .	581
15.2.1 Linearität . . . . .	582
15.2.2 Zeitverschiebung . . . . .	583
15.2.3 Amplitudenmodulation . . . . .	585
15.2.4 Ähnlichkeit und Zeitumkehr . . . . .	587
15.3 Inverse Fourier-Transformation . . . . .	588
15.3.1 Definition . . . . .	588
15.3.2 Vertauschungssatz . . . . .	590
15.3.3 Linearität . . . . .	591
15.4 Differenziation, Integration und Faltung . . . . .	591
15.4.1 Differenziation im Zeitbereich . . . . .	591
15.4.2 Differenziation im Frequenzbereich . . . . .	593
15.4.3 Multiplikationssatz . . . . .	593
15.4.4 Integration . . . . .	594
15.4.5 Faltung . . . . .	595
15.5 Periodische Funktionen . . . . .	595
15.5.1 Fourier-Transformation einer Fourier-Reihe . . . . .	596
15.5.2 Koeffizienten der Fourier-Reihe . . . . .	596
15.5.3 Grenzwertbetrachtung . . . . .	598
15.6 Anwendungen . . . . .	600
15.6.1 Lineare zeitinvariante Systeme . . . . .	600
15.6.2 Tiefpassfilter . . . . .	602
15.7 Aufgaben . . . . .	604
 <b>16 Laplace-Transformation</b>	 607
16.1 Bildbereich . . . . .	607
16.1.1 Definition . . . . .	607
16.1.2 Laplace- und Fourier-Transformation . . . . .	610
16.2 Eigenschaften . . . . .	611
16.2.1 Linearität . . . . .	611
16.2.2 Ähnlichkeit . . . . .	612
16.2.3 Zeitverschiebung . . . . .	613
16.2.4 Dämpfung . . . . .	614
16.3 Differenziation, Integration und Faltung . . . . .	615
16.3.1 Differenziation . . . . .	615
16.3.2 Integration . . . . .	617
16.3.3 Faltung . . . . .	618
16.3.4 Grenzwerte . . . . .	619
16.4 Transformation periodischer Funktionen . . . . .	619
16.5 Rücktransformation . . . . .	621
16.6 Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen . . . . .	622
16.7 Anwendungen . . . . .	628
16.8 Aufgaben . . . . .	631

<b>17 z-Transformation</b>	<b>633</b>
17.1 Transformation diskreter Signale . . . . .	633
17.1.1 Definition . . . . .	633
17.1.2 z-Transformation und Laplace-Transformation . . . . .	635
17.2 Eigenschaften . . . . .	636
17.2.1 Linearität . . . . .	636
17.2.2 Verschiebung . . . . .	637
17.2.3 Dämpfung . . . . .	638
17.2.4 Vorwärtsgrenzen . . . . .	638
17.3 Lösung von Differenzengleichungen . . . . .	639
17.4 Anwendungen . . . . .	641
17.5 Aufgaben . . . . .	643
<b>A Anhang</b>	<b>645</b>
A.1 Ableitungen . . . . .	645
A.2 Ableitungsregeln . . . . .	645
A.3 Integrale . . . . .	646
A.4 Integralregeln . . . . .	647
A.5 Potenzreihen . . . . .	647
A.6 Fourier-Reihen . . . . .	648
A.7 Fourier-Transformationen . . . . .	650
A.8 Laplace-Transformationen . . . . .	652
A.9 z-Transformationen . . . . .	653
A.10 Griechisches Alphabet . . . . .	653
A.11 Bedeutende Mathematiker . . . . .	654
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>671</b>
<b>Sachwortverzeichnis</b>	<b>673</b>