

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Grundlagen</b>	<b>17</b>
1.1 Logik und Mengen	17
1.1.1 Aussagenlogik	17
1.1.2 Mengen	20
1.2 Zahlen	23
1.2.1 Natürliche Zahlen	23
1.2.2 Ganze Zahlen	24
1.2.3 Rationale Zahlen	25
1.2.4 Reelle Zahlen	26
1.2.5 Ordnung	28
1.2.6 Intervalle	29
1.2.7 Betrag und Signum	30
1.2.8 Summe und Produkt	33
1.3 Potenz und Wurzel	34
1.3.1 Potenzen	34
1.3.2 Potenzgesetze	35
1.3.3 Wurzeln	35
1.3.4 Binomischer Satz	36
1.4 Trigonometrie	38
1.4.1 Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck	38
1.4.2 Winkel im Grad- und Bogenmaß	40
1.4.3 Sinus- und Kosinussatz	41
1.5 Gleichungen und Ungleichungen	42
1.5.1 Lineare Gleichungen	43
1.5.2 Potenzgleichungen	44
1.5.3 Quadratische Gleichungen	44
1.5.4 Wurzelgleichungen	46
1.5.5 Ungleichungen	47
1.6 Beweise	49
1.6.1 Direkter Beweis	50
1.6.2 Indirekter Beweis	50
1.6.3 Konstruktiver Beweis	51
1.6.4 Vollständige Induktion	52
1.7 Aufgaben	53
<b>2 Lineare Gleichungssysteme</b>	<b>55</b>
2.1 Einführung	55

2.2	Gauß-Algorithmus . . . . .	57
2.2.1	Äquivalenzumformungen . . . . .	58
2.2.2	Vorwärtselimination . . . . .	59
2.2.3	Rückwärtseinsetzen . . . . .	60
2.2.4	Gaußsches Eliminationsverfahren . . . . .	61
2.2.5	Rechenschema . . . . .	62
2.3	Spezielle Typen linearer Gleichungssysteme . . . . .	64
2.3.1	Lineare Gleichungssysteme ohne Lösung . . . . .	64
2.3.2	Lineare Gleichungssysteme mit unendlich vielen Lösungen . . . . .	65
2.3.3	Systeme mit redundanten Gleichungen . . . . .	66
2.3.4	Unterbestimmte lineare Gleichungssysteme . . . . .	67
2.3.5	Überbestimmte lineare Gleichungssysteme . . . . .	68
2.3.6	Homogene lineare Gleichungssysteme . . . . .	69
2.3.7	Lineare Gleichungssysteme mit Parametern . . . . .	71
2.4	Numerische Verfahren . . . . .	73
2.4.1	Jakobi-Iteration . . . . .	73
2.4.2	Gauß-Seidel-Iteration . . . . .	74
2.5	Anwendungen . . . . .	75
2.5.1	Produktion . . . . .	75
2.5.2	Netzwerkanalyse in der Elektrotechnik . . . . .	76
2.6	Aufgaben . . . . .	77
<b>3</b>	<b>Vektoren</b> . . . . .	<b>79</b>
3.1	Der Begriff eines Vektors . . . . .	79
3.2	Vektorrechnung ohne Koordinaten . . . . .	81
3.2.1	Addition und Subtraktion . . . . .	81
3.2.2	Skalare Multiplikation . . . . .	83
3.2.3	Skalarprodukt . . . . .	84
3.2.4	Vektorprodukt . . . . .	88
3.2.5	Spatprodukt . . . . .	91
3.2.6	Lineare Abhängigkeit und Komponentenzzerlegung . . . . .	93
3.3	Vektoren in Koordinatendarstellung . . . . .	95
3.3.1	Koordinatendarstellung . . . . .	96
3.3.2	Addition und Subtraktion . . . . .	97
3.3.3	Skalare Multiplikation . . . . .	98
3.3.4	Skalarprodukt . . . . .	98
3.3.5	Vektorprodukt . . . . .	100
3.3.6	Spatprodukt . . . . .	102
3.3.7	Lineare Abhängigkeit und Komponentenzzerlegung . . . . .	102
3.4	Punkte, Geraden und Ebenen . . . . .	104
3.4.1	Kartesisches Koordinatensystem . . . . .	104
3.4.2	Parameterdarstellung von Geraden und Ebenen . . . . .	106
3.4.3	Parameterfreie Darstellung von Geraden und Ebenen . . . . .	108
3.4.4	Schnitte von Geraden und Ebenen . . . . .	109
3.4.5	Abstände . . . . .	111

3.4.6	Winkel	114
3.5	Anwendungen	116
3.5.1	Kraft	116
3.5.2	Arbeit	116
3.5.3	Drehmoment	117
3.6	Aufgaben	118
<b>4</b>	<b>Matrizen</b>	<b>123</b>
4.1	Der Begriff einer Matrix	123
4.2	Rechnen mit Matrizen	127
4.2.1	Addition, Subtraktion und skalare Multiplikation	128
4.2.2	Multiplikation von Matrizen	129
4.3	Determinanten	135
4.3.1	Determinante einer (2,2)-Matrix	135
4.3.2	Determinante einer (3,3)-Matrix	137
4.3.3	Determinante einer (n,n)-Matrix	141
4.4	Inverse Matrix	144
4.4.1	Invertierbare Matrizen	145
4.4.2	Inverse einer (2,2)-Matrix	146
4.4.3	Inverse Matrix und lineares Gleichungssystem	146
4.5	Lineare Abbildungen	147
4.5.1	Matrizen als Abbildungen	147
4.5.2	Kern, Bild und Rang	149
4.6	Eigenwerte und Eigenvektoren	150
4.7	Numerische Verfahren	155
4.8	Anwendungen	156
4.9	Aufgaben	158
<b>5</b>	<b>Funktionen</b>	<b>161</b>
5.1	Einführung	161
5.1.1	Begriff der Funktion	161
5.1.2	Wertetabelle	164
5.1.3	Schaubild	164
5.1.4	Explizite und implizite Darstellung	166
5.1.5	Abschnittsweise definierte Funktionen	167
5.1.6	Funktionsschar	168
5.1.7	Verkettung von Funktionen	169
5.2	Polynome und rationale Funktionen	173
5.2.1	Potenzfunktionen mit ganzen Hochzahlen	173
5.2.2	Polynome	175
5.2.3	Gebrochenrationale Funktionen	182
5.3	Eigenschaften	190
5.3.1	Symmetrie	190
5.3.2	Periode	194
5.3.3	Monotonie	195
5.3.4	Beschränktheit	196

5.4	Sinus, Kosinus und Tangens	197
5.4.1	Definition am Einheitskreis	197
5.4.2	Eigenschaften	199
5.4.3	Allgemeine Sinus- und Kosinusfunktion	201
5.5	Grenzwert und Stetigkeit	203
5.5.1	Zahlenfolgen	204
5.5.2	Grenzwert einer Funktion	210
5.5.3	Stetigkeit	212
5.5.4	Asymptotisches Verhalten	217
5.6	Exponential- und Hyperbelfunktionen	221
5.6.1	Exponentialfunktionen	221
5.6.2	Die e-Funktion	223
5.6.3	Hyperbelfunktionen	225
5.7	Umkehrfunktionen	228
5.7.1	Das Prinzip der Umkehrfunktion	228
5.7.2	Wurzelfunktionen	230
5.7.3	Arkusfunktionen	231
5.7.4	Logarithmusfunktionen	235
5.7.5	Area-Funktionen	238
5.8	Numerische Verfahren	239
5.8.1	Berechnung von Funktionswerten	239
5.8.2	Bisektionsverfahren	240
5.9	Anwendungen	242
5.9.1	Messwerte	242
5.9.2	Industrieroboter	244
5.10	Aufgaben	245
<b>6</b>	<b>Differenzialrechnung</b>	<b>251</b>
6.1	Steigung und Ableitungsfunktion	251
6.1.1	Tangente und Differenzierbarkeit	251
6.1.2	Differenzial	255
6.1.3	Ableitungsfunktion	255
6.1.4	Mittelwertsatz der Differenzialrechnung	259
6.1.5	Höhere Ableitungen	260
6.2	Ableitungstechnik	261
6.2.1	Ableitungsregeln	261
6.2.2	Ableitung der Umkehrfunktion	266
6.2.3	Logarithmisches Differenzieren	268
6.2.4	Implizites Differenzieren	269
6.2.5	Zusammenfassung	270
6.3	Regel von Bernoulli-de l'Hospital	271
6.4	Geometrische Bedeutung der Ableitungen	275
6.4.1	Neigungswinkel und Schnittwinkel	275
6.4.2	Monotonie	277
6.4.3	Krümmung	278

6.4.4	Lokale Extrema	279
6.4.5	Wendepunkte	283
6.4.6	Globale Extrema	284
6.5	Numerische Verfahren	285
6.5.1	Numerische Differenziation	286
6.5.2	Newton-Verfahren	287
6.5.3	Sekantenverfahren	289
6.6	Anwendungen	290
6.6.1	Fehlerrechnung	290
6.6.2	Extremwertaufgaben	292
6.6.3	Momentan- und Durchschnittsgeschwindigkeit	294
6.7	Aufgaben	295
<b>7</b>	<b>Integralrechnung</b>	<b>301</b>
7.1	Flächenproblem	301
7.1.1	Integralsymbol	301
7.1.2	Integral als Grenzwert von Summen	302
7.1.3	Bestimmtes Integral	304
7.2	Zusammenhang von Ableitung und Integral	305
7.2.1	Integralfunktion	305
7.2.2	Stammfunktion	307
7.2.3	Bestimmtes Integral und Stammfunktion	309
7.2.4	Mittelwertsatz der Integralrechnung	310
7.3	Integrationstechnik	312
7.3.1	Integrationsregeln	312
7.3.2	Integration durch Substitution	316
7.3.3	Partielle Integration	323
7.3.4	Gebrochenrationale Funktionen	325
7.3.5	Uneigentliche Integrale	328
7.4	Länge, Flächeninhalt und Volumen	331
7.4.1	Flächeninhalte	331
7.4.2	Bogenlänge	333
7.4.3	Rotationskörper	335
7.5	Numerische Verfahren	339
7.5.1	Trapezregel	340
7.5.2	Romberg-Verfahren	342
7.6	Anwendungen	342
7.6.1	Effektivwert	342
7.6.2	Schwerpunkte und statische Momente ebener Flächen	343
7.7	Aufgaben	347
<b>8</b>	<b>Potenzreihen</b>	<b>351</b>
8.1	Unendliche Reihen	352
8.2	Potenzreihen und Konvergenz	356
8.3	Taylor-Reihen	357
8.4	Eigenschaften	359

8.5	Numerische Verfahren . . . . .	365
8.6	Anwendungen . . . . .	366
8.7	Aufgaben . . . . .	367
<b>9</b>	<b>Kurven</b>	<b>369</b>
9.1	Parameterdarstellung . . . . .	369
9.2	Kegelschnitte . . . . .	372
9.3	Tangente . . . . .	378
9.4	Krümmung . . . . .	380
9.5	Bogenlänge . . . . .	383
9.6	Numerische Verfahren . . . . .	385
9.7	Anwendungen . . . . .	387
9.7.1	Mechanik . . . . .	387
9.7.2	Straßenbau . . . . .	388
9.8	Aufgaben . . . . .	390
<b>10</b>	<b>Funktionen mit mehreren Variablen</b>	<b>393</b>
10.1	Definition und Darstellung . . . . .	393
10.1.1	Definition einer Funktion mit mehreren Variablen . . . . .	393
10.1.2	Schaubild einer Funktion mit mehreren Variablen . . . . .	394
10.1.3	Schnittkurven mit Ebenen und Höhenlinien . . . . .	394
10.2	Grenzwert und Stetigkeit . . . . .	398
10.2.1	Grenzwert einer Funktion mit mehreren Variablen . . . . .	398
10.2.2	Stetigkeit . . . . .	399
10.3	Differenziation . . . . .	400
10.3.1	Partielle Ableitungen und partielle Differenzierbarkeit . . . . .	400
10.3.2	Differenzierbarkeit und Tangentialebene . . . . .	403
10.3.3	Gradient und Richtungsableitung . . . . .	405
10.3.4	Differenzial . . . . .	408
10.3.5	Höhere partielle Ableitungen . . . . .	411
10.3.6	Extremwerte . . . . .	413
10.4	Ausgleichsrechnung . . . . .	415
10.4.1	Methode der kleinsten Fehlerquadrate . . . . .	415
10.4.2	Ausgleichsrechnung mit Polynomen . . . . .	416
10.4.3	Lineare Ausgleichsrechnung . . . . .	420
10.5	Vektorwertige Funktionen . . . . .	422
10.6	Numerische Verfahren . . . . .	423
10.6.1	Mehrdimensionales Newton-Verfahren . . . . .	423
10.6.2	Gradientenverfahren . . . . .	425
10.7	Anwendungen . . . . .	427
10.8	Aufgaben . . . . .	429
<b>11</b>	<b>Komplexe Zahlen und Funktionen</b>	<b>431</b>
11.1	Definition und Darstellung . . . . .	431
11.1.1	Komplexe Zahlen . . . . .	431
11.1.2	Gaußsche Zahlenebene . . . . .	432

11.1.3	Polarkoordinaten	433
11.1.4	Exponentialform	435
11.2	Rechenregeln	437
11.2.1	Gleichheit	437
11.2.2	Addition und Subtraktion	437
11.2.3	Multiplikation und Division	438
11.2.4	Rechnen mit der konjugiert komplexen Zahl	440
11.2.5	Rechnen mit dem Betrag einer komplexen Zahl	440
11.3	Potenzen, Wurzeln und Polynome	442
11.3.1	Potenzen	443
11.3.2	Wurzeln	443
11.3.3	Fundamentalsatz der Algebra	446
11.4	Komplexe Funktionen	448
11.4.1	Ortskurven	449
11.4.2	Harmonische Schwingungen	450
11.4.3	Transformationen	454
11.5	Anwendungen	458
11.6	Aufgaben	459
<b>12</b>	<b>Gewöhnliche Differenzialgleichungen</b>	<b>461</b>
12.1	Einführung	461
12.1.1	Grundbegriffe	461
12.1.2	Anfangswert- und Randwertproblem	464
12.1.3	Richtungsfeld und Orthogonaltrajektorie	466
12.1.4	Differenzialgleichung und Funktionenschar	468
12.2	Differenzialgleichungen erster Ordnung	469
12.2.1	Separation der Variablen	470
12.2.2	Lineare Substitution	472
12.2.3	Ähnlichkeitsdifferenzialgleichungen	473
12.3	Lineare Differenzialgleichungen	474
12.3.1	Homogene und inhomogene lineare Differenzialgleichungen	474
12.3.2	Lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung	477
12.3.3	Allgemeine Eigenschaften	481
12.3.4	Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	484
12.4	Schwingungsdifferenzialgleichungen	497
12.4.1	Allgemeine Form	497
12.4.2	Freie Schwingung	498
12.4.3	Harmonisch angeregte Schwingung	500
12.4.4	Frequenzgänge	504
12.5	Differenzialgleichungssysteme	506
12.5.1	Eliminationsverfahren	506
12.5.2	Zustandsvariablen	508
12.5.3	Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten	510
12.5.4	Lineare Differenzialgleichung als System	516
12.5.5	Stabilität	518

12.6	Numerische Verfahren . . . . .	522
12.6.1	Polygonzugverfahren von Euler . . . . .	522
12.6.2	Euler-Verfahren für Differenzialgleichungssysteme . . . . .	524
12.7	Anwendungen . . . . .	525
12.7.1	Temperaturverlauf . . . . .	525
12.7.2	Radioaktiver Zerfall . . . . .	525
12.7.3	Freier Fall mit Luftwiderstand . . . . .	526
12.7.4	Feder-Masse-Schwinger . . . . .	527
12.7.5	Pendel . . . . .	528
12.7.6	Wechselstromkreise . . . . .	528
12.8	Aufgaben . . . . .	531
<b>13</b>	<b>Fourier-Reihen</b>	<b>535</b>
13.1	Fourier-Analyse . . . . .	535
13.1.1	Periodische Funktionen . . . . .	535
13.1.2	Trigonometrische Polynome . . . . .	537
13.1.3	Fourier-Reihe . . . . .	539
13.1.4	Satz von Fourier . . . . .	540
13.1.5	Gibbssches Phänomen . . . . .	543
13.2	Komplexe Darstellung . . . . .	545
13.2.1	Komplexe Fourier-Reihe . . . . .	545
13.2.2	Berechnung komplexer Fourier-Koeffizienten . . . . .	547
13.2.3	Spektrum . . . . .	549
13.2.4	Minimaleigenschaft . . . . .	552
13.3	Eigenschaften . . . . .	554
13.3.1	Symmetrie . . . . .	554
13.3.2	Integrationsintervall . . . . .	555
13.3.3	Mittelwert . . . . .	556
13.3.4	Linearität . . . . .	556
13.3.5	Ähnlichkeit und Zeitumkehr . . . . .	558
13.3.6	Zeitverschiebung . . . . .	559
13.4	Aufgaben . . . . .	561
<b>14</b>	<b>Verallgemeinerte Funktionen</b>	<b>563</b>
14.1	Heaviside-Funktion . . . . .	563
14.2	Dirac-Distribution . . . . .	565
14.3	Verallgemeinerte Ableitung . . . . .	567
14.4	Faltung . . . . .	569
14.5	Aufgaben . . . . .	572
<b>15</b>	<b>Fourier-Transformation</b>	<b>573</b>
15.1	Integraltransformation . . . . .	573
15.1.1	Definition . . . . .	573
15.1.2	Darstellung mit Real- und Imaginärteil . . . . .	575
15.1.3	Sinus- und Kosinustransformation . . . . .	577
15.1.4	Transformation gerader und ungerader Funktionen . . . . .	578



15.1.5	Darstellung mit Amplitude und Phase . . . . .	580
15.2	Eigenschaften . . . . .	581
15.2.1	Linearität . . . . .	582
15.2.2	Zeitverschiebung . . . . .	583
15.2.3	Amplitudenmodulation . . . . .	585
15.2.4	Ähnlichkeit und Zeitumkehr . . . . .	587
15.3	Inverse Fourier-Transformation . . . . .	588
15.3.1	Definition . . . . .	588
15.3.2	Vertauschungssatz . . . . .	590
15.3.3	Linearität . . . . .	591
15.4	Differenziation, Integration und Faltung . . . . .	591
15.4.1	Differenziation im Zeitbereich . . . . .	591
15.4.2	Differenziation im Frequenzbereich . . . . .	593
15.4.3	Multiplikationssatz . . . . .	593
15.4.4	Integration . . . . .	594
15.4.5	Faltung . . . . .	595
15.5	Periodische Funktionen . . . . .	595
15.5.1	Fourier-Transformation einer Fourier-Reihe . . . . .	596
15.5.2	Koeffizienten der Fourier-Reihe . . . . .	596
15.5.3	Grenzwertbetrachtung . . . . .	598
15.6	Anwendungen . . . . .	600
15.6.1	Lineare zeitinvariante Systeme . . . . .	600
15.6.2	Tiefpassfilter . . . . .	602
15.7	Aufgaben . . . . .	604
<b>16</b>	<b>Laplace-Transformation</b> . . . . .	<b>607</b>
16.1	Bildbereich . . . . .	607
16.1.1	Definition . . . . .	607
16.1.2	Laplace- und Fourier-Transformation . . . . .	610
16.2	Eigenschaften . . . . .	611
16.2.1	Linearität . . . . .	611
16.2.2	Ähnlichkeit . . . . .	612
16.2.3	Zeitverschiebung . . . . .	613
16.2.4	Dämpfung . . . . .	614
16.3	Differenziation, Integration und Faltung . . . . .	615
16.3.1	Differenziation . . . . .	615
16.3.2	Integration . . . . .	617
16.3.3	Faltung . . . . .	618
16.3.4	Grenzwerte . . . . .	619
16.4	Transformation periodischer Funktionen . . . . .	619
16.5	Rücktransformation . . . . .	621
16.6	Lösung gewöhnlicher Differenzialgleichungen . . . . .	622
16.7	Anwendungen . . . . .	628
16.8	Aufgaben . . . . .	631

<b>17 z-Transformation</b>	<b>633</b>
17.1 Transformation diskreter Signale . . . . .	633
17.1.1 Definition . . . . .	633
17.1.2 z-Transformation und Laplace-Transformation . . . . .	635
17.2 Eigenschaften . . . . .	636
17.2.1 Linearität . . . . .	636
17.2.2 Verschiebung . . . . .	637
17.2.3 Dämpfung . . . . .	638
17.2.4 Vorwärtsdifferenzen . . . . .	638
17.3 Lösung von Differenzengleichungen . . . . .	639
17.4 Anwendungen . . . . .	641
17.5 Aufgaben . . . . .	643
<b>A Anhang</b>	<b>645</b>
A.1 Ableitungen . . . . .	645
A.2 Ableitungsregeln . . . . .	645
A.3 Integrale . . . . .	646
A.4 Integralregeln . . . . .	647
A.5 Potenzreihen . . . . .	647
A.6 Fourier-Reihen . . . . .	648
A.7 Fourier-Transformationen . . . . .	650
A.8 Laplace-Transformationen . . . . .	652
A.9 z-Transformationen . . . . .	653
A.10 Griechisches Alphabet . . . . .	653
A.11 Bedeutende Mathematiker . . . . .	654
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>671</b>
<b>Sachwortverzeichnis</b>	<b>673</b>