

Inhaltsverzeichnis

1	Mathematische Begriffe und Schreibweisen	1
1.1	Zahlen	1
1.1.1	Zahlendarstellung auf der Zahlengeraden	1
1.2	Mengen	3
1.2.1	Aufzählende Mengenschreibweise	3
1.2.2	Beschreibende Mengenschreibweise	3
1.2.3	Mengendiagramme	4
1.2.4	Beziehungen zwischen Mengen (Mengenrelationen)	4
1.2.5	Mengenverknüpfungen (Mengenoperationen)	5
1.3	Intervallschreibweisen	8
1.4	Symbole der Logik	8
2	Rechnen mit Termen	9
2.1	Grundrechenarten mit Termen	9
2.1.1	Addition und Subtraktion (Rechnen mit Klammertermen)	10
2.1.2	Klammern in Klammern	10
2.2	Multiplikation und Division	11
2.2.1	Multiplikation mit negativen Zahlen	11
2.2.2	Multiplikation mit Null (Nullprodukt)	11
2.2.3	Multiplikation mit Summentermen	12
2.2.4	Binomische Formeln	13
2.2.5	Quotienten aus positiven und negativen Zahlen	16
2.2.6	Rechnen mit Bruchtermen	18
3	Lineare Gleichungen	27
3.1	Äquivalenz von Aussageformen	27
3.2	Lösungsverfahren für lineare Gleichungen	28
3.3	Einfache lineare Gleichungen	29
3.4	Bruchgleichungen	31
3.5	Gleichungen mit Formvariablen	34
3.6	Verhältnisgleichungen (Proportionen)	40
3.7	Textliche Gleichungen	43
3.7.1	Allgemeine textliche Gleichungen	43
3.7.2	Mischungsaufgaben	45
3.7.3	Bewegungsaufgaben	48
3.7.4	Behälteraufgaben	51
3.7.5	Arbeitsaufgaben	53
4	Funktionen 1. Grades	56
4.1	Der Funktionsbegriff	56
4.2	Darstellung von Funktionen	57

4.3	Funktionsdarstellung im Koordinatensystem	58
4.3.1	Das rechtwinklige Koordinatensystem	58
4.3.2	Das Polarkoordinatensystem	59
4.4	Lineare Funktionen der Technik	61
4.5	Die lineare Funktion mit der Funktionsgleichung $y = mx$	62
4.6	Die Funktion 1. Grades mit der Funktionsgleichung $y = mx + b$	64
4.7	Graphische Darstellung linearer Zusammenhänge	67
5	Systeme linearer Gleichungen	69
5.1	Graphisches Lösungsverfahren von Gleichungssystemen	69
5.2	Rechnerische Lösungsverfahren von Gleichungssystemen	70
5.2.1	Das Gleichsetzungsverfahren	71
5.2.2	Das Einsetzungsverfahren	71
5.2.3	Das Additionsverfahren	74
5.2.4	Das Determinantenverfahren	77
5.2.5	Gleichungssysteme mit Bruchtermen	79
5.3	Lösungsverfahren für Gleichungssysteme mit drei und mehr Variablen	82
5.4	Textaufgaben mit zwei Variablen	88
5.4.1	Mischungsaufgaben	88
5.4.2	Bewegungsaufgaben	89
5.4.3	Behälteraufgaben	90
6	Potenzen	93
6.1	Potenzbegriff	93
6.2	Potenzgesetze	93
6.2.1	Addition und Subtraktion von Potenzen	93
6.2.2	Multiplikation von Potenzen	94
6.2.3	Division von Potenzen	95
6.2.4	Potenzieren von Potenzen	96
6.3	Erweiterung des Potenzbegriffes auf a^1 , a^0 und Potenzen mit negativen ganzen Hochzahlen	96
6.4	Besondere Potenzen (Zehnerpotenzen)	98
6.5	Potenzen von Binomen	101
7	Wurzeln	103
7.1	Wurzelbegriff	103
7.1.1	Quadratwurzeln	103
7.1.2	Der allgemeine Wurzelbegriff	106
7.2	Wurzeln als Potenzen mit gebrochenen Hochzahlen	107
7.3	Rechnen mit Wurzel- und Potenztermen	109
8	Quadratische Gleichungen	114
8.1	Rechnerische Lösung quadratischer Gleichungen	115
8.1.1	Reinquadratische Gleichungen	115
8.1.2	Gemischtquadratische Gleichungen ohne Absolutglied (Defektquadratische Gleichungen)	117
8.1.3	Gemischtquadratische Gleichungen	117
8.2	Lösbarkeit quadratischer Gleichungen, Diskriminante	119
8.3	Koeffizientenregel von Vieta	120

8.4	Biquadratische Gleichungen	123
8.5	Quadratische Gleichungssysteme mit zwei Variablen	123
8.6	Textaussagen, die auf quadratische Gleichungen führen	125
9	Wurzelgleichungen	129
9.1	Wurzelgleichungen mit einer Variablen	129
9.2	Wurzelgleichungen mit zwei Variablen	132
10	Ungleichungen	135
10.1	Äquivalenzumformungen bei Ungleichungen	135
10.2	Einfache lineare Ungleichungen	138
10.3	Bruchungleichungen	138
11	Lineare Ungleichungssysteme	144
12	Lineares Optimieren	147
13	Quadratische Funktionen	156
13.1	Einfache quadratische Grundfunktionen	
	Die Grundfunktion mit der Funktionsgleichung $y = x^2$	157
13.2	Die allgemeine quadratische Funktion mit der Funktionsgleichung $y = ax^2 + bx + c$	159
13.3	Die Scheitelform der quadratischen Funktionsgleichung	160
13.4	Aufstellen von Funktionsgleichungen aus Vorgaben	161
13.5	Graphische Lösung quadratischer Gleichungen	165
14	Potenzfunktionen	166
14.1	Die Funktionen $x \mapsto x^n$ ($y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$)	167
14.1.1	Achsensymmetrische Parabeln (n gerade)	167
14.1.2	Punktsymmetrische Parabeln (n ungerade)	167
14.2	Die Funktionen $x \mapsto x^{-n}$ ($y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$)	168
14.2.1	Punktsymmetrische Hyperbeln (n ungerade)	168
14.2.2	Achsensymmetrische Hyperbeln (n gerade)	168
15	Wurzelfunktionen	169
15.1	Quadratwurzelfunktionen	169
15.2	Wurzelfunktionen höherer Ordnung	172
16	Exponentialfunktionen	175
16.1	Die allgemeine Exponentialfunktion	175
16.2	Die e -Funktion	178
17	Logarithmen	184
17.1	Logarithmenbegriff	184
17.2	Logarithmensysteme	185
17.2.1	Natürliche Logarithmen	185
17.2.2	Zehnerlogarithmen	186
17.3	Logarithmengesetze	187

18 Logarithmusfunktionen	191
18.1 Die allgemeine Logarithmusfunktion	191
18.2 Die natürliche Logarithmusfunktion	193
19 Exponentialgleichungen	194
20 Analytische Geometrie	199
20.1 Länge und Steigung von Strecken	199
20.2 Teilpunkte von Strecken	201
20.2.1 Mittelpunkte von Strecken	201
20.2.2 Beliebiger Teilpunkt T einer Strecke	201
20.3 Geradengleichungen	202
20.3.1 Punkt-Steigungs-Form	202
20.3.2 Zwei-Punkte-Form	203
20.3.3 Achsenabschnittsform	204
20.3.4 HESSE-Form der Geradengleichung	205
20.4 Winkel zwischen Geraden	208
20.4.1 Winkel zwischen Gerade und x-Achse (Steigung und Steigungswinkel)	208
20.4.2 Schnittwinkel zweier Geraden	210
20.5 Orthogonale Geraden	211
20.6 Kreisgleichungen	213
20.6.1 Mittelpunktsgleichung eines Kreises	213
20.6.2 Allgemeine Kreisgleichung	214
20.7 Kreis und Gerade	216
20.8 Parabeln und Hyperbeln	220
20.8.1 Brennpunkteigenschaften der Parabel	220
20.8.2 Brennpunkteigenschaften der Hyperbel	222
21 Koordinatensystem mit logarithmischer Teilung	223

Trigonometrie

22 Winkelfunktionen am rechtwinkligen Dreieck	224
22.1 Seitenverhältnisse als Winkelfunktionen	224
22.2 Definition der Winkelfunktionen	225
22.3 Längen- und Winkelberechnungen	225
22.3.1 Die Sinusfunktion	225
22.3.2 Die Kosinusfunktion	227
22.3.3 Die Tangens- und Kotangensfunktion	230
22.3.4 Vermischte Aufgaben	231
22.4 Zusammenhang zwischen den Winkelfunktionen	238
22.5 Winkelfunktionen beliebiger Winkel	240
22.6 Die Graphen der Winkelfunktionen	244
22.6.1 Die Schaubilder der Sinus- und Kosinusfunktion	246
22.6.2 Die allgemeine Sinusfunktion und ihre graphische Darstellung	246
22.6.3 Die Schaubilder der Tangens- und Kotangensfunktion	249
22.7 Trigonometrische Gleichungen	251

23 Winkelfunktionen am schiefwinkligen Dreieck	254
23.1 Sinussatz	254
23.2 Kosinussatz	261
23.3 Flächenberechnung des schiefwinkligen Dreiecks	269
24 Additionstheoreme	271
24.1 Funktionen der doppelten und halben Winkel	275
25 Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck	277
25.1 Satz des Pythagoras	277
25.2 Kathetensatz (Satz des Euklid)	291
25.3 Höhensatz	293
26 Ähnlichkeit	296
26.1 Strahlensätze	296
26.2 Streckenteilung und Mittelwerte	303
26.3 Stetige Teilung (Goldener Schnitt)	306
27 Flächenberechnung	310
27.1 Geradlinig begrenzte Flächen	310
27.2 Kreisförmig begrenzte Flächen	313
28 Volumenberechnung	321
28.1 Prismatische Körper	321
28.2 Pyramidenförmige und kegelförmige Körper	327
28.2.1 Pyramide und Pyramidenstumpf	327
28.2.2 Kegel und Kegelstumpf	328
28.3 Kugelförmige Körper	332
28.3.1 Vollkugel	332
28.3.2 Kugelabschnitt (Kugelsegment)	335
28.3.3 Kugelschicht	336
28.3.4 Kugelausschnitt (Kugelsektor)	339
28.4 Schiefe Körper	344
28.4.1 Satz des Cavalieri	344
28.4.2 Simpson'sche Regel	345
28.5 Oberflächen und Volumina von Rotationskörpern Guldin'sche Regel	347

Differentialrechnung

29 Grenzwerte	350
29.1 Grenzwerte von Zahlenfolgen	350
29.2 Grenzwerte von Funktionen	351
29.2.1 Grenzwerte für $x \rightarrow x_0$	351
29.2.2 Grenzwerte für $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow -\infty$	353
29.2.3 Rechenregeln für Grenzwerte	354

30 Stetigkeit von Funktionen	356
31 Differentiation elementarer Funktionen	358
(Steigungsberechnung bei Funktionsgraphen)	358
31.1 Differenzenquotient und Differentialquotient	358
31.2 Ableitung von Potenzfunktionen	359
31.3 Allgemeine Ableitungsregeln	360
31.4 Ableitung elementarer Funktionen (Übersicht)	363
31.5 Höhere Ableitungen	364
32 Horner-Schema und Nullstellen ganzrationaler Funktionen	367
32.1 Polynomdivision	367
32.2 Horner-Schema	368
33 Das Newton'sche Näherungsverfahren	371
34 Anwendung der Differentialrechnung bei ganzrationalen Funktionen	373
34.1 Kurvendiskussion	373
34.2 Funktionssynthese	380
34.3 Extremwertaufgaben	384
35 Gebrochenrationale Funktionen	391
36 Trigonometrische Funktionen	401
36.1 Ableitungen	401
36.2 Funktionsuntersuchung trigonometrischer Funktionen	402
36.3 Funktionssynthese trigonometrischer Funktionen	407
37 Logarithmus- und Exponentialfunktionen	410
37.1 Ableitungen	410
37.1.1 Ableitung der Logarithmusfunktionen von $y = \lg x$ und $y = \ln x$	410
37.1.2 Ableitung der Exponentialfunktionen $y = a^x$ und $y = e^x$	410
37.2 Funktionsuntersuchung von Exponentialfunktionen	411
37.3 Funktionssynthese von Exponentialfunktionen	414

Integralrechnung

38 Der Begriff des Integrals	416
38.1 Die Flächeninhaltsfunktion	416
38.2 Stammfunktionen (= unbestimmte Integrale)	417
38.3 Grundintegrale elementarer Funktionen	419
38.4 Das bestimmte Integral als Fläche	419
38.5 Die Fläche als Grenzwert	420

39 Flächenberechnung mit Hilfe der Integralrechnung	422
39.1 Flächen zwischen Funktionsgraph und x-Achse	422
39.2 Flächen zwischen zwei Funktionsgraphen	425
40 Das bestimmte Integral als Volumen (Volumen von Rotationskörpern)	433
40.1 Rotationssymmetrie zur x-Achse	433
40.2 Rotationssymmetrie zur y-Achse	434

Vektorrechnung – Analytische Geometrie auf Vektorbasis

41 Punkte und Vektoren	435
41.1 Definition eines Vektors	435
41.2 Ortsvektoren	436
41.3 Betrag eines Vektors	437
41.4 Vektoren im Raum	437
41.4.1 Vektor-Addition	437
41.4.2 Vektor-Subtraktion	438
41.4.3 Anwendungsbeispiele	438
41.4.4 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar (S-Multiplikation)	439
41.4.5 Lineare Abhängigkeit von Vektoren	440
42 Geraden im Raum	446
42.1 Vektorielle Geradengleichungen	446
42.1.1 Punkt-Richtungs-Gleichung	446
42.1.2 Zwei-Punkte-Gleichung	447
42.2 Darstellung von Geraden	448
42.2.1 Räumliche Darstellung im Koordinatensystem	448
42.2.2 Projektion einer Geraden auf die Koordinatenebenen	449
42.2.3 Spurpunkte von Geraden	450
42.3 Spezielle Geraden	452
42.4 Schnittpunkt zweier Geraden	454
43 Vektorielle Darstellung von Ebenen	458
43.1 Parameterdarstellung einer Ebene	458
43.1.1 Punkt-Richtungs-Gleichung	458
43.1.2 Drei-Punkte-Gleichung	459
43.2 Koordinatengleichung der Ebene	460
43.3 Achsenabschnittsgleichung	461
43.4 Zeichnerische Darstellung von Ebenen	461
43.4.1 Spurgeraden von Ebenen	461
43.4.2 Zeichnen einer Ebene	463

Produkte von Vektoren

44 Das Skalarprodukt	465
44.1 Winkel zwischen Vektoren	465
44.2 Definition des Skalarproduktes	466
44.3 Anwendungen des Skalarproduktes	467
44.3.1 Winkel eines räumlichen Dreiecks	467
44.3.2 Schnittwinkel von Geraden	467
45 Das Vektorprodukt	469
45.1 Definition des Vektorproduktes	469
45.2 Anwendungen des Vektorproduktes	471
46 Das Spatprodukt	474
46.1 Definition des Spatproduktes	474
46.2 Anwendungen des Spatproduktes	475
47 Normalenformen der Ebenengleichung	478
47.1 Punkt-Normalengleichung der Ebene	478
47.2 Hesse'sche Normalengleichung der Ebene	480
48 Abstandsberechnungen	482
48.1 Abstand eines Punktes von einer Ebene	482
48.2 Abstand einer Ebene vom Ursprung	483
48.3 Abstand paralleler Ebenen	483
48.4 Abstand eines Punktes von einer Geraden	484
48.5 Abstand windschiefer Geraden	485
49 Schnittwinkel	489
49.1 Schnittwinkel von Gerade und Ebene	489
49.2 Schnittwinkel zweier Ebenen	490
49.3 Schnittwinkel zweier Geraden	490
50 Umrechnung von Ebenengleichungen	492
51 Inzidenz von Geraden und Ebenen	496
51.1 Schnittgerade zweier Ebenen	496
51.2 Schnittpunkt von Geraden und Ebenen	498
51.3 Parallelität und Inzidenz von Ebenen	500
51.4 Parallelität und Inzidenz von Geraden	501

Komplexe Zahlen und Funktionen

52 Grundbegriffe der komplexen Rechnung	503
52.1 Imaginäre Zahlen	503
52.2 Komplexe Zahlen \mathbb{C}	505
52.3 Gauß'sche Zahlenebene	506
Graphische Darstellung komplexer Zahlen	506
53 Darstellungsformen komplexer Zahlen	507
53.1 Komplexe Zahlen in Komponentenform	507
(algebraische oder kartesische Form)	507
53.2 Komplexe Zahlen in Polarform	509
53.2.1 Trigonometrische Form	509
53.2.2 Komplexe Zahlen in Exponentialform	509
54 Komplexe Arithmetik	511
54.1 Rechenoperationen in der Komponentenform	511
54.1.1 Addition und Subtraktion komplexer Zahlen	511
54.1.2 Multiplikation und Division komplexer Zahlen	512
54.2 Rechenoperationen in der Polarform	513
54.2.1 Multiplikation in der trigonometrischen Form	513
54.2.2 Division in der trigonometrischen Form	515
54.2.3 Potenzieren in der Exponentialform	516
54.2.4 Radizieren in der Exponentialform	516
54.2.5 Logarithmieren in der Exponentialform	517
55 Anwendungen der komplexen Rechnung	519
55.1 Komplexe Funktionen	519
55.2 Symbolische Darstellung von Schwingungen	520
Harmonische Schwingungen in komplexer Darstellung	521
55.3 Komplexe Widerstände	523
55.4 Ortskurven	525
55.5 Inversion einer Ortskurve	527
Ergebnisse	530
Sachwortverzeichnis	569