

Inhaltsverzeichnis

Teil I Grundlagen

1	Diskretisierung linearer Differenzialgleichungen	3
1.1	Einführendes Beispiel	3
1.1.1	Differenzenverfahren	4
1.1.2	Die Methode der finiten Elemente	5
1.2	Dividierte Differenzen	7
1.3	Randwertprobleme bei gewöhnlichen Differenzialgleichungen	8
1.3.1	Ein Modellproblem	8
1.3.2	Ableitungen in den Randbedingungen	11
1.4	Differenzenverfahren für elliptische Randwertprobleme	11
1.4.1	Diskretisierung mit dividierten Differenzen	13
1.4.2	Ableitungen in den Randbedingungen	15
1.4.3	Ein zweidimensionales Modellproblem	18
1.5	Die Methode der finiten Elemente	20
1.5.1	Die Variationsmethode	20
1.5.2	Prinzip der Methode der finiten Elemente	22
1.5.3	Lokale und globale Basisfunktionen	24
1.5.4	Aufbau der Gesamtmatrix A und der rechten Seite b	26
	Aufgaben	31
	Literatur	33
2	Iterative Lösung linearer Gleichungssysteme	35
2.1	Gesamtschritt- und Einzelschrittverfahren	36
2.1.1	Konstruktion der Iterationsverfahren	36
2.1.2	Einige Konvergenzsätze	41
2.2	Block-Relaxationsverfahren	48
2.3	Methode der konjugierten Gradienten (CG-Verfahren)	49
2.3.1	Grundlage und Algorithmus	50
2.3.2	Vorkonditionierung	52

Aufgaben	58
Literatur	60

Teil II Mehrgittermethoden im \mathbb{R}^1

3 Erste Experimente	65
3.1 Die Gauß-Seidel-Iteration als Glätter	65
3.2 Was ist ein Glätter?	66
3.3 Eigenschaften der gedämpften Jacobi-Iteration	68
3.4 Eigenschaften der Gauß-Seidel-Iteration	71
3.4.1 Fourier-Analyse	72
3.5 Glättung auf verschiedenen Gittern	74
Aufgaben	76
Literatur	77
4 Ein Zweigitterverfahren	79
4.1 Ideensammlung	79
4.2 Das Modellproblem auf zwei Gittern	81
4.2.1 Relaxation	81
4.2.2 Interpolation (Prolongation)	82
4.2.3 Restriktion	83
4.2.4 Beziehungen zwischen den Operatoren	84
4.3 Ein Modellproblem mit Neumann-Randbedingungen	86
4.3.1 Relaxation	87
4.3.2 Interpolation	88
4.3.3 Restriktion	88
4.4 Eine Zweigittermethode	89
4.4.1 Kontrolle der Konvergenz	92
Aufgaben	92
Literatur	93
5 Vollständige Mehrgitterzyklen	95
5.1 Erste Beispiel-Methode	95
5.2 Rekursive Formulierung der V- und W-Zyklen	98
5.2.1 Der rekursive V-Zyklus	98
5.2.2 Der rekursive W-Zyklus	99
5.3 Formulierung des V-Zyklus mit Stufenzahl ohne Rekursion	100
5.4 Der FMG-Zyklus	101
5.5 Die Komplexität der Mehrgittermethoden	102
5.6 Ein Beispiel mit Neumann-Randbedingung	103
5.7 Vergleich der Methoden	104
Aufgaben	105

6	Mehrgittermethoden mit der Finite-Elemente-Methode	107
6.1	Diskretisierung	107
6.2	Hierarchische Finite-Elemente-Räume	108
6.3	Fehlerschätzer	112
6.4	Homogene und adaptive Netz-Verfeinerungen	116
6.5	Elemente einer Mehrgittermethode	118
6.5.1	Relaxation	119
6.5.2	Restriktion	119
6.5.3	Interpolation (Prolongation)	120
6.5.4	Ein Beispiel	121
6.6	Schlussbetrachtung zu Teil II oder: Wasser in den Wein	122
	Aufgaben	123
	Literatur	124

Teil III Mehrgittermethoden im \mathbb{R}^n

7	Differenzenverfahren	127
7.1	Glättende Relaxationsverfahren	127
7.1.1	Dividierte Differenzen und Gauß-Seidel: ein Beispiel	128
7.1.2	Was ist ein Glätter?	129
7.1.3	Was beeinflusst den Glätter?	131
7.1.4	Das gedämpfte Jacobi-Verfahren	134
7.1.5	Lokale Fourier-Analyse für das Gauß-Seidel-Verfahren	136
7.2	Transfer-Operatoren	142
7.2.1	Restriktionsoperatoren für das zweidimensionale Modellproblem	142
7.2.2	Interpolationsoperatoren für das zweidimensionale Modellproblem	144
7.3	Vollständige Mehrgitterzyklen	149
7.4	Modifikationen des Modellproblems	155
7.4.1	Randwerte ungleich null	155
7.4.2	Rechteckige Gebiete	156
7.4.3	Krumme Ränder, randnahe Gitterpunkte	157
7.4.4	Ableitungen in den Randbedingungen	162
	Aufgaben	165
	Literatur	167
8	Finite-Elemente-Methoden	169
8.1	Funktionen- und Vektorräume für die Finite-Elemente-Methode	169
8.2	Homogene und adaptive Netz-Verfeinerungen	171
8.3	Algorithmen zur Netz-Verfeinerung	172
8.3.1	Reguläre Verfeinerung	172
8.3.2	Bisektion über die längste Kante	173
8.3.3	Geometrische Elemente im \mathbb{R}^3 und ihre Verfeinerung	175
8.4	Hierarchische Finite-Elemente-Räume	176
8.5	Fehlerschätzer	180
8.5.1	Grundlagen	180

8.5.2	Fehlerschätzung durch lokal quadratische Ansatzfunktionen	181
8.5.3	Weitere Fehlerschätzer – kurz erwähnt	183
8.6	Strategien zur Netz-Verfeinerung	184
8.6.1	Steuerung über die Knotenzahl	184
8.6.2	Steuerung über einen Schwellenwert	184
8.7	Mehrgittermethoden mit finiten Elementen	185
8.7.1	Relaxationsverfahren	185
8.7.2	Transfer-Operatoren	186
8.7.3	Vollständige Mehrgitterzyklen	191
8.7.4	Kaskadische Mehrgittermethoden	192
8.8	Anwendungslösungen verschiedener Softwaresysteme	195
8.8.1	Die Werkzeugkiste <code>pdetool</code> von MATLAB	195
8.8.2	Das Programmpaket PLTMG	196
8.8.3	Das Programmpaket KASCADE	199
	Aufgaben	203
	Literatur	205

Teil IV Anhang

9	Ergänzungen und Erweiterungen	209
9.1	Nichtlineare Probleme	209
9.2	Instationäre Probleme, parabolische Differenzialgleichungen	212
9.3	Parallelisierung	215
9.3.1	Parallelisierung durch Gebietszerlegung	216
9.3.2	Rechnerarchitektur und Kommunikation	222
9.3.3	Parallele Mehrgitter-Algorithmen	224
9.4	Mehrgittermethoden auf adaptiven Verbundgittern	226
9.4.1	Ein Randwertproblem im \mathbb{R}^1	227
9.4.2	Der FAC-Zweigitter-Algorithmus für das spezielle Beispiel	231
9.4.3	Ein Randwertproblem im \mathbb{R}^2	233
9.5	Ein anspruchsvolles Problem im \mathbb{R}^3	234
9.5.1	Der Lamellenbrenner	235
9.5.2	Die Navier-Stokes-Gleichungen	236
9.5.3	Die Diskretisierung	238
9.5.4	Parallelisierung der Mehrgittermethode	241
9.5.5	Numerische Experimente	242
	Literatur	245
10	Matrix- und Vektornormen, Konditionszahl	247
	Literatur	252
11	Lösungen zu ausgewählten Aufgaben	253
11.1	Aufgaben zu Kap. 1	253
11.2	Aufgaben zu Kap. 2	255
11.3	Aufgaben zu Kap. 3	259
11.4	Aufgaben zu Kap. 4	260

11.5 Aufgaben zu Kap. 5	262
11.6 Aufgaben zu Kap. 6	264
11.7 Aufgaben zu Kap. 7	265
11.8 Aufgaben zu Kap. 8	270
Literatur	273
Sachverzeichnis	275