

# Inhaltsverzeichnis

<b>Geleitwort.....</b>	<b>V</b>
<b>Danksagung.....</b>	<b>VII</b>
<b>Abbildungsverzeichnis.....</b>	<b>XV</b>
<b>Tabellenverzeichnis.....</b>	<b>XXI</b>
<b>Verzeichnis der epistemologischen Dreiecke.....</b>	<b>XXIII</b>
<b>Transkriptionsregeln.....</b>	<b>XXV</b>
<b>Einleitung.....</b>	<b>1</b>
<b>1 Variablen in der elementaren Algebra</b>	
– Bedeutung und Schwierigkeiten.....	7
1.1 Die Bedeutung von Variablen und Variablenkonzepten.....	7
1.1.1 Variablen und Variablenkonzepte.....	8
1.1.2 Die Rolle von Variablen in der elementaren Algebra.....	14
1.1.2.1 Variablen als Teil der Formalisierung.....	16
1.1.2.2 Variablen als Mittel für mathematische Tätigkeiten auf allgemeiner Ebene.....	19
1.2 Schwierigkeiten beim Variablenverständnis.....	22
1.2.1 Die Überbetonung des Kalküls und die fehlende Sinnstiftung.....	24
1.2.2 Die Vieldeutigkeit von Variablen.....	27
1.2.3 Der Bruch zwischen Arithmetik und Algebra.....	32
1.3 Weiterführende Forschungsinteressen.....	35

<b>2 Lerntheoretische Grundlagen.....</b>	<b>39</b>
2.1 Begriffsentwicklung aus konstruktivistischer Perspektive.....	40
2.2 Begriffsentwicklung aus epistemologischer Perspektive.....	44
2.2.1 Der besondere Charakter von Kommunikation.....	45
2.2.2 Der besondere Charakter mathematischer Begriffe.....	47
2.2.3 Das epistemologische Dreieck.....	50
2.2.4 Die Rolle der ‚Alltagsbegriffe‘ in der Begriffsentwicklung.....	55
2.3 Zusammenfassung.....	58
<b>3 Zur propädeutischen Entwicklung von Variablenkonzepten in der Grundschule.....</b>	<b>61</b>
3.1 Didaktische Grundlagen.....	61
3.1.1 Das genetische Prinzip.....	62
3.1.1.1 Kompetenz-, Prozess- und Subjektorientierung als grundlegende Sichtweisen der Mathematikdidaktik.....	63
3.1.1.2 Die genetische Sichtweise auf mathematische Lernprozesse.....	66
3.1.2 Das Spiralprinzip.....	68
3.2 ‚Early Algebra‘ .....	71
3.2.1 Algebraisierung des Mathematikunterrichts der Grundschule.....	72
3.2.2 Untersuchungen zu algebraischen Kompetenzen von Grundschulkindern.....	76
3.2.3 Zusammenführung der Überlegungen zur propädeutischen Entwicklung von Variablenkonzepten.....	78
3.3 Die Bedeutung der Sprache und der Wortvariablen.....	80
3.3.1 Zur phylogenetischen Entwicklung der algebraischen Sprache....	80
3.3.2 Zur ontogenetischen Entwicklung der algebraischen Sprache....	84
3.3.3 Die Rolle von Quasi-Variablen.....	88
3.4 Zusammenfassung.....	89

<b>4 Das Verallgemeinern mathematischer Muster.....</b>	93
<b>4.1 Das Verallgemeinern als Leitidee zur Einführung von Variablen.....</b>	94
<b>4.1.1 Die Tätigkeit des Verallgemeinerns aus algebraischer Perspektive.....</b>	94
<b>4.1.1.1 Verallgemeinern – kognitive und sprachliche Tätigkeit....</b>	96
<b>4.1.1.2 Verallgemeinern – allgemeine und algebraische Tätigkeit</b>	97
<b>4.1.2 Der Kontext des Verallgemeinerns als Zugang zur Algebra.....</b>	98
<b>4.1.2.1 Unbestimmte und Veränderliche beim Verallgemeinern...</b>	100
<b>4.1.2.1 Der Kontext des Verallgemeinerns vor dem Hintergrund des Spiralprinzips.....</b>	100
<b>4.1.2.3 Folgen – ein Kontext zum Verallgemeinern.....</b>	105
<b>4.2 Das Verallgemeinern als grundlegende Tätigkeit im Mathematikunterricht.....</b>	109
<b>4.2.1 Mathematik als die Wissenschaft von den Mustern.....</b>	110
<b>4.2.2 Verallgemeinern: Das Allgemeine im Besonderen sehen und beschreiben.....</b>	113
<b>4.3 Zusammenfassung.....</b>	116
<b>5 Forschungsfragen und Untersuchungsdesign.....</b>	119
<b>5.1 Zentrale Forschungsfrage.....</b>	119
<b>5.2 Aufbau der Interviewstudie.....</b>	122
<b>5.2.1 Das klinische Interview als Methode zur Datenerhebung.....</b>	124
<b>5.2.2 Die Konzeption der Interviewaufgaben.....</b>	125
<b>5.2.2.1 Das Aufgabenformat Plättchenmuster.....</b>	126
<b>5.2.2.2 Das Aufgabenformat Partnerzahlen.....</b>	133
<b>5.2.2.3 Das Aufgabenformat Zaubertrick.....</b>	139
<b>5.2.3 Auswahl der teilnehmenden Schülerschaft.....</b>	147
<b>5.2.4 Auswertung der Daten.....</b>	148
<b>5.3 Auffächerung der zentralen Forschungsfrage.....</b>	150

<b>6 Ergebnisse.....</b>	<b>153</b>
6.1 Die Entwicklung von Variablenkonzepten im Verallgemeinerungsprozess.....	153
6.1.1 Erstes Fallbeispiel: Thorsten.....	154
6.1.2 Zweites Fallbeispiel: Lars.....	163
6.1.3 Zusammenfassung und Fazit.....	168
6.2 Sprachliche Mittel zur Verallgemeinerung mathematischer Muster.....	169
6.2.1 Verallgemeinerungsweisen.....	170
6.2.2 Angabe eines Beispiels.....	172
6.2.3 Aufzählung mehrerer Beispiele.....	176
6.2.4 Quasi-Variablen.....	177
6.2.5 Bedingungssätze.....	178
6.2.6 Verwendung von Wörtern oder Zeichen mit Variablencharakter..	180
6.2.7 Mischformen.....	182
6.2.8 Zusammenfassung und Fazit.....	183
6.3 Der Zusammenhang von Strukturierung und Versprachlichung.....	185
6.3.1 Fallbeispiel: Kai.....	186
6.3.2 Zusammenfassung und Fazit.....	191
6.4 Die Rolle des Kontextes bei der Verallgemeinerung.....	193
6.4.1 Verallgemeinerungen im Kontext Plättchenmuster.....	194
6.4.2 Verallgemeinerungen im Kontext Partnerzahlen.....	196
6.4.3 Verallgemeinerungen im Kontext Zaubertrick.....	198
6.4.4 Zusammenfassung und Fazit.....	200
6.5 Die Verallgemeinerung von Mustern verschiedener Darstellungsebenen.....	201
6.5.1 Die Loslösung von der geometrisch-visualisierten Ebene.....	202
6.5.2 Die Verknüpfung von verschiedenen Darstellungsebenen.....	206
6.5.3 Die Strukturentwicklung auf geometrisch-visualisierter und arithmetischer Ebene.....	210
6.5.4 Zusammenfassung und Fazit.....	216

6.6 Die Rolle von expliziten und rekursiven Sichtweisen bei der Verallgemeinerung.....	216
6.6.1 Explizite und rekursive Deutungen der Folgen.....	218
6.6.1.1 Explizite Deutungen.....	218
6.6.1.2 Rekursive Deutungen.....	221
6.6.1.3 Der Wechsel zwischen den Sichtweisen als Umdeutung der Folge.....	224
6.6.2 Proportionalitätsannahme.....	225
6.6.3 Die Bedeutung verschiedener Musterstrukturierungen für die Verallgemeinerung.....	232
6.6.4 Zusammenfassung und Fazit.....	234
6.7 Die Verallgemeinerung von Beziehungen zwischen unbestimmten Zahlen.....	235
6.7.1 Operationale und strukturelle Deutungen der Beziehung.....	236
6.7.2 Einseitige und beidseitige Deutungen der Beziehung.....	238
6.7.3 Das Einnehmen verschiedener Perspektiven auf die Beziehung zwischen zwei Zahlen.....	240
6.7.4 Anforderungsbedingte Wechsel.....	243
6.7.5 Durch den Charakter der Beziehung bedingte Wechsel.....	245
6.7.6 Zusammenfassung und Fazit.....	252
6.8 Die Deutung der Wortvariablen ‚Zahl‘ im Kontext des Verallgemeinerns.....	254
6.8.1 Deutung der Wortvariablen ‚Zahl‘ als Unbestimmte und ‚Zahl+20‘ als neue unabhängige Variable.....	255
6.8.2 Deutung der Wortvariablen ‚Zahl‘ als Unbestimmte und ‚Zahl+20‘ als Term.....	258
6.8.3 Orientierung an den Symbolen ‚+20‘ ohne explizite Deutung der Wortvariablen.....	261
6.8.4 Zusammenfassung und Fazit.....	264
6.9 Die Rolle der Verallgemeinerung beim Argumentieren.....	265
6.9.1 Erstes Fallbeispiel: Niklas.....	267
6.9.2 Zweites Fallbeispiel: Ali.....	271

6.9.3 Zusammenfassung und Fazit.....	274
<b>7 Zusammenfassung und Ausblick.....</b>	<b>277</b>
7.1 Zusammenfassung.....	278
7.2 Ausblick.....	284
7.2.1 Folgerungen und Fragen für die Erforschung von Lernprozessen und für die Unterrichtsentwicklung.....	284
7.2.2 Folgerungen für die Praxis.....	286
7.3 Schlussbemerkung.....	289
<b>Literaturverzeichnis.....</b>	<b>291</b>