

Inhaltsverzeichnis

1	Kurven	1
1.1	Wege, Kurven, Bogenlänge	1
1.1.1	Einführung: Ebene Kurven	1
1.1.2	Kurven im \mathbb{R}^n	5
1.1.3	Glatte und stückweise glatte Kurven	9
1.1.4	Die Bogenlänge	11
1.1.5	Parametertransformation, Orientierung	16
1.2	Theorie ebener Kurven	20
1.2.1	Bogenlänge und umschlossene Fläche	20
1.2.2	Krümmung und Krümmungsradius	24
1.2.3	Tangenteneinheitsvektor, Normalenvektor, natürliche Gleichung	27
1.2.4	Evolute und Evolvente	30
1.3	Beispiele ebener Kurven I: Kegelschnitte	33
1.3.1	Kreis	33
1.3.2	Ellipse	37
1.3.3	Hyperbel	40
1.3.4	Parabel	44
1.3.5	Allgemeine Kegelschnittgleichung, Hauptachsentransformation	49
1.4	Beispiele ebener Kurven II: Rollkurven, Blätter, Spiralen	55
1.4.1	Zykloiden	55
1.4.2	Epizykloiden	56
1.4.3	Anwendung: Wankelmotor	60
1.4.4	Hypozykloiden	63
1.4.5	Blattartige Kurven	66
1.4.6	Kurbelgetriebe	70
1.4.7	Spiralen	71
1.5	Theorie räumlicher Kurven	76
1.5.1	Krümmung, Torsion und begleitendes Dreiein	76
1.5.2	Berechnung von Krümmung, Torsion und Dreiein in beliebiger Parameterdarstellung	79
1.5.3	Natürliche Gleichungen und Frenetsche Formeln	83
1.6	Vektorfelder, Potentiale, Kurvenintegrale	86
1.6.1	Vektorfelder und Skalarfelder	86
1.6.2	Kurvenintegrale	89
1.6.3	Der Kurvenhauptsatz	93
1.6.4	Potentialkriterium	96
1.6.5	Berechnung von Potentialen	100
1.6.6	Beweis des Potentialkriteriums	104

2	Flächen und Flächenintegrale	109
2.1	Flächenstücke und Flächen	109
2.1.1	Flächenstücke	109
2.1.2	Tangentialebenen, Normalenvektoren	112
2.1.3	Parametertransformation, Orientierung	115
2.1.4	Flächen	118
2.2	Flächenintegrale	119
2.2.1	Flächeninhalt	119
2.2.2	Flächenintegrale erster und zweiter Art	122
2.2.3	Transformationsformel für Flächenintegrale zweiter Art	126
3	Integralsätze	129
3.1	Der Gaußsche Integralsatz	129
3.1.1	Ergiebigkeit, Divergenz	129
3.1.2	Der Gaußsche Integralsatz für Bereiche mit stückweise glattem Rand	134
3.1.3	Die Kettenregel der Divergenz	136
3.1.4	Beweis des Gaußschen Integralsatzes für Bereiche mit stückweise glattem Rand	138
3.1.5	Gaußscher und Greenscher Integralsatz in der Ebene	141
3.1.6	Der Gaußsche Integralsatz für Skalarfelder	144
3.2	Der Stokessche Integralsatz	147
3.2.1	Einfache Flächenstücke	147
3.2.2	Zirkulation, Wirbelstärke, Rotation	148
3.2.3	Idee des Stokesschen Integralsatzes	153
3.2.4	Stokesscher Integralsatz im dreidimensionalen Raum	154
3.2.5	Zirkulation und Stokesscher Satz in der Ebene	158
3.3	Weitere Differential- und Integralformeln im \mathbb{R}^3	159
3.3.1	Nabla-Operator	160
3.3.2	Formeln über Zusammensetzungen mit grad, div und rot	160
3.3.3	Gaußscher und Stokesscher Satz in div-, grad-, rot-, und Nabla-Form	162
3.3.4	Eine Anwendung auf partielle Differentialgleichungen	164
3.3.5	Partielle Integration	165
3.3.6	Die beiden Greenschen Integralformeln	166
3.3.7	Krummlinige orthogonale Koordinaten	167
3.3.8	Die Differentialoperatoren grad, div, rot, Δ in krummlinigen orthogonalen Koordinaten	171
3.4	Wirbelfreiheit, Quelfreiheit, Potentiale	175
3.4.1	Wirbelfreiheit: $\text{rot } V = 0$, skalare Potentiale	175
3.4.2	Laplace-Gleichung, harmonische Funktionen	177
3.4.3	Poissongleichung	179
3.4.4	Quelfreiheit: $\text{div } W = 0$, Vektorpotentiale	181
3.4.5	Quellfreie Vektorpotentiale	184
3.4.6	Helmholtzscher Zerlegungssatz	186
4	Alternierende Differentialformen	189
4.1	Alternierende Differentialformen im \mathbb{R}^3	189

4.1.1	Integralsätze in Komponentenschreibweise	189
4.1.2	Differentialformen und totale Differentiale	191
4.1.3	Rechenregeln für Differentialformen	193
4.1.4	Integration von Differentialformen, Integralsätze	196
4.2	Alternierende Differentialformen im \mathbb{R}^n	198
4.2.1	Definition, Rechenregeln	198
4.2.2	Integrale über p -dimensionalen Flächen	200
4.2.3	Transformationsformel für Integrale	201
4.2.4	Der allgemeine Stokessche Satz	202
5	Kartesische Tensoren	205
5.1	Tensoralgebra	205
5.1.1	Motivation: Spannungstensor	205
5.1.2	Definition kartesischer Tensoren	206
5.1.3	Rechenregeln für Tensoren	211
5.1.4	Invariante Tensoren	214
5.1.5	Diagonalisierung symmetrischer Tensoren und das Tensorellipsoid	217
5.2	Tensoranalysis	220
5.2.1	Differenzierbare Tensorfelder, Fundamentalsatz der Feldtheorie	220
5.2.2	Zusammenhang zwischen Tensorgradienten und grad, div, rot, Δ	222
5.2.3	Der Gaußsche Satz für Tensorfelder zweiter Stufe	224
5.2.4	Anwendungen	225
	Lösungen zu den Übungen	231
	Symbole	237
	Literaturverzeichnis	239
	Stichwortverzeichnis	243