

# Inhaltsverzeichnis

|  |          |
|--|----------|
| <b>1 Kurven</b>  | <b>1</b> |
| 1.1 Wege, Kurven, Bogenlänge . . . . .   | 1        |
| 1.1.1 Einführung: Ebene Kurven . . . . .   | 1        |
| 1.1.2 Kurven im $\mathbb{R}^n$ . . . . .   | 5        |
| 1.1.3 Glatte und stückweise glatte Kurven . . . . .  | 9        |
| 1.1.4 Die Bogenlänge . . . . .   | 11       |
| 1.1.5 Parametertransformation, Orientierung . . . . .  | 16       |
| 1.2 Theorie ebener Kurven . . . . .  | 20       |
| 1.2.1 Bogenlänge und umschlossene Fläche . . . . .   | 20       |
| 1.2.2 Krümmung und Krümmungsradius . . . . .   | 24       |
| 1.2.3 Tangenteneinheitsvektor, Normalenvektor, natürliche Gleichung . . . . .                    | 27       |
| 1.2.4 Evolute und Evolvente . . . . .  | 30       |
| 1.3 Beispiele ebener Kurven I: Kegelschnitte . . . . .   | 33       |
| 1.3.1 Kreis . . . . .  | 33       |
| 1.3.2 Ellipse . . . . .  | 37       |
| 1.3.3 Hyperbel . . . . .   | 40       |
| 1.3.4 Parabel . . . . .  | 44       |
| 1.3.5 Allgemeine Kegelschnittgleichung, Hauptachsentransformation . . . . .                      | 49       |
| 1.4 Beispiele ebener Kurven II: Rollkurven, Blätter, Spiralen . . . . .                          | 55       |
| 1.4.1 Zykloiden . . . . .  | 55       |
| 1.4.2 Epizykloiden . . . . .   | 56       |
| 1.4.3 Anwendung: Wankelmotor . . . . .   | 60       |
| 1.4.4 Hypozykloiden . . . . .  | 63       |
| 1.4.5 Blattartige Kurven . . . . .   | 66       |
| 1.4.6 Kurbelgetriebe . . . . .   | 70       |
| 1.4.7 Spiralen . . . . .   | 71       |
| 1.5 Theorie räumlicher Kurven . . . . .  | 76       |
| 1.5.1 Krümmung, Torsion und begleitendes Dreibein . . . . .                                      | 76       |
| 1.5.2 Berechnung von Krümmung, Torsion und Dreibein in beliebiger Parameterdarstellung . . . . . | 79       |
| 1.5.3 Natürliche Gleichungen und Frenetsche Formeln . . . . .                                    | 83       |
| 1.6 Vektorfelder, Potentiale, Kurvenintegrale . . . . .  | 86       |
| 1.6.1 Vektorfelder und Skalarfelder . . . . .  | 86       |
| 1.6.2 Kurvenintegrale . . . . .  | 89       |
| 1.6.3 Der Kurvenhauptsatz . . . . .  | 93       |
| 1.6.4 Potentialkriterium . . . . .   | 96       |
| 1.6.5 Berechnung von Potentialen . . . . .   | 100      |
| 1.6.6 Beweis des Potentialkriteriums . . . . .   | 104      |

|  |            |
|--|------------|
| <b>2 Flächen und Flächenintegrale</b>  | <b>109</b> |
| 2.1 Flächenstücke und Flächen . . . . .  | 109        |
| 2.1.1 Flächenstücke . . . . .  | 109        |
| 2.1.2 Tangentialebenen, Normalenvektoren . . . . .   | 112        |
| 2.1.3 Parametertransformation, Orientierung . . . . .  | 115        |
| 2.1.4 Flächen . . . . .  | 118        |
| 2.2 Flächenintegrale . . . . .   | 119        |
| 2.2.1 Flächeninhalt . . . . .  | 119        |
| 2.2.2 Flächenintegrale erster und zweiter Art . . . . .  | 122        |
| 2.2.3 Transformationsformel für Flächenintegrale zweiter Art . . . . .                                       | 126        |
| <b>3 Integralsätze</b>   | <b>129</b> |
| 3.1 Der Gaußsche Integralsatz . . . . .  | 129        |
| 3.1.1 Ergiebigkeit, Divergenz . . . . .  | 129        |
| 3.1.2 Der Gaußsche Integralsatz für Bereiche mit stückweise glattem Rand . . . . .                           | 134        |
| 3.1.3 Die Kettenregel der Divergenz . . . . .  | 136        |
| 3.1.4 Beweis des Gaußschen Integralsatzes für Bereiche mit stückweise glattem Rand                           | 138        |
| 3.1.5 Gaußscher und Greenscher Integralsatz in der Ebene . . . . .   | 141        |
| 3.1.6 Der Gaußsche Integralsatz für Skalarfelder . . . . .   | 144        |
| 3.2 Der Stokessche Integralsatz . . . . .  | 147        |
| 3.2.1 Einfache Flächenstücke . . . . .   | 147        |
| 3.2.2 Zirkulation, Wirbelstärke, Rotation . . . . .  | 148        |
| 3.2.3 Idee des Stokesschen Integralsatzes . . . . .  | 153        |
| 3.2.4 Stokesscher Integralsatz im dreidimensionalen Raum . . . . .   | 154        |
| 3.2.5 Zirkulation und Stokesscher Satz in der Ebene . . . . .  | 158        |
| 3.3 Weitere Differential- und Integralformeln im $\mathbb{R}^3$ . . . . .                                    | 159        |
| 3.3.1 Nabla-Operator . . . . .   | 160        |
| 3.3.2 Formeln über Zusammensetzungen mit grad, div und rot . . . . .   | 160        |
| 3.3.3 Gaußscher und Stokesscher Satz in div-, grad-, rot-, und Nabla-Form . . . . .                          | 162        |
| 3.3.4 Eine Anwendung auf partielle Differentialgleichungen . . . . .   | 164        |
| 3.3.5 Partielle Integration . . . . .  | 165        |
| 3.3.6 Die beiden Greenschen Integralformeln . . . . .  | 166        |
| 3.3.7 Krummlinige orthogonale Koordinaten . . . . .  | 167        |
| 3.3.8 Die Differentialoperatoren grad, div, rot, $\Delta$ in krummlinigen orthogonalen Koordinaten . . . . . | 171        |
| 3.4 Wirbelfreiheit, Quellfreiheit, Potentiale . . . . .  | 175        |
| 3.4.1 Wirbelfreiheit: $\operatorname{rot} \mathbf{V} = \mathbf{0}$ , skalare Potentiale . . . . .            | 175        |
| 3.4.2 Laplace-Gleichung, harmonische Funktionen . . . . .  | 177        |
| 3.4.3 Poissons-Gleichung . . . . .   | 179        |
| 3.4.4 Quellfreiheit: $\operatorname{div} \mathbf{W} = 0$ , Vektorpotentiale . . . . .                        | 181        |
| 3.4.5 Quellfreie Vektorpotentiale . . . . .  | 184        |
| 3.4.6 Helmholtzscher Zerlegungssatz . . . . .  | 186        |
| <b>4 Alternierende Differentialformen</b>  | <b>189</b> |
| 4.1 Alternierende Differentialformen im $\mathbb{R}^3$ . . . . .   | 189        |

|                                |   |            |
|--------------------------------|---|------------|
| 4.1.1                          | Integralsätze in Komponentenschreibweise . . . . .  | 189        |
| 4.1.2                          | Differentialformen und totale Differentiale . . . . .   | 191        |
| 4.1.3                          | Rechenregeln für Differentialformen . . . . .   | 193        |
| 4.1.4                          | Integration von Differentialformen, Integralsätze . . . . .   | 196        |
| 4.2                            | Alternierende Differentialformen im $\mathbb{R}^n$ . . . . .  | 198        |
| 4.2.1                          | Definition, Rechenregeln . . . . .  | 198        |
| 4.2.2                          | Integrale über $p$ -dimensionalen Flächen . . . . .   | 200        |
| 4.2.3                          | Transformationsformel für Integrale . . . . .   | 201        |
| 4.2.4                          | Der allgemeine Stokessche Satz . . . . .  | 202        |
| <b>5</b>                       | <b>Kartesische Tensoren</b>   | <b>205</b> |
| 5.1                            | Tensoralgebra . . . . .   | 205        |
| 5.1.1                          | Motivation: Spannungstensor . . . . .   | 205        |
| 5.1.2                          | Definition kartesischer Tensoren . . . . .  | 206        |
| 5.1.3                          | Rechenregeln für Tensoren . . . . .   | 211        |
| 5.1.4                          | Invariante Tensoren . . . . .   | 214        |
| 5.1.5                          | Diagonalisierung symmetrischer Tensoren und das Tensorellipsoid . . . . .                                   | 217        |
| 5.2                            | Tensoranalysis . . . . .  | 220        |
| 5.2.1                          | Differenzierbare Tensorfelder, Fundamentalsatz der Feldtheorie . . . . .                                    | 220        |
| 5.2.2                          | Zusammenhang zwischen Tensorgradienten und $\text{grad}$ , $\text{div}$ , $\text{rot}$ , $\Delta$ . . . . . | 222        |
| 5.2.3                          | Der Gaußsche Satz für Tensorfelder zweiter Stufe . . . . .  | 224        |
| 5.2.4                          | Anwendungen . . . . .   | 225        |
| <b>Lösungen zu den Übungen</b> |   | <b>231</b> |
| <b>Symbole</b>                 |   | <b>237</b> |
| <b>Literaturverzeichnis</b>    |   | <b>239</b> |
| <b>Stichwortverzeichnis</b>    |   | <b>243</b> |