

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	
1.1	Vorgehensweise bei der FEM .....	3
1.2	Verschiedene Elementtypen .....	5
1.3	Beispiele zur Finite-Elemente-Methode .....	10
1.3.1	Beispiel zu nichtlinearen Problemen .....	10
1.3.2	Beispiele zur Optimierung.....	11
<b>2</b>	<b>Mathematische Grundlagen</b>	
2.1	Schreibweisen .....	19
2.2	Vektoren .....	20
2.2.1	Definition eines $n$ dimensionalen Vektors .....	20
2.2.2	Skalarprodukt .....	20
2.2.3	Kreuzprodukt .....	20
2.2.4	Ableitung von Vektoren .....	21
2.2.5	Der Nabla-Vektor .....	22
2.2.6	Der Gradientenvektor .....	22
2.2.7	Divergenz und Laplace-Operator.....	23
2.3	Matrizen .....	23
2.3.1	Definition einer Matrix.....	23
2.3.2	Rechenregeln.....	24
2.3.3	Transponierte Matrix.....	26
2.3.4	Orthogonale Matrix .....	27
2.4	Die Dyade (Tensor zweiter Stufe) .....	27
2.4.1	Differentialoperator .....	28
2.4.2	Tensor höherer Stufe .....	28
2.5	Felder .....	28
2.5.1	Skalarfelder .....	28
2.5.2	Das Vektorfeld als Gradient des Skalarfeldes .....	29
2.5.3	Das dyadische Feld .....	29
2.6	Lineare Transformation .....	32
2.6.1	Transformation eines Vektors.....	32
2.6.2	Transformation einer Dyade (Tensor zweiter Stufe).....	34
2.6.3	Beispiele zur Transformation .....	34
2.7	Funktionale.....	36
2.7.1	Diskretisierung des Funktionals .....	38
2.8	Dreieckskoordinaten .....	39
2.8.1	Ableitungen in Dreieckskoordinaten (Jakobi-Matrix) .....	41
2.8.2	Integration in Dreieckskoordinaten .....	44
2.9	Numerische Integration (Quadratur).....	45
2.9.1	Numerische Integration für eindimensionale Probleme ...	45

<b>2.9.2</b>	Numerische Integration in Dreieckskoordinaten .....	<b>46</b>
<b>2.10</b>	Lineare Gleichungssysteme bei der FEM .....	<b>48</b>
<b>2.10.1</b>	Definition der Bandbreite .....	<b>48</b>
<b>2.10.2</b>	Rechenzeiten zur Lösung linearer Gleichungssysteme .....	<b>49</b>
<b>2.10.3</b>	Positiv definite Matrix .....	<b>50</b>
<b>2.10.4</b>	Das Verfahren von Cholesky .....	<b>51</b>
<b>2.10.5</b>	Kondition linearer Gleichungssysteme .....	<b>53</b>
<b>2.10.6</b>	Zwangsbedingungen bei linearen Gleichungssystemen ....	<b>55</b>
<b>2.11</b>	Näherungsfehler bei der FEM .....	<b>57</b>
<b>2.12</b>	Das Tonti-Diagramm.....	<b>58</b>
<b>3</b>	<b>Beschreibung elastostatischer Probleme</b>	
<b>3.1</b>	Die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie.....	<b>61</b>
<b>3.1.1</b>	Verknüpfung der Verschiebungen mit den Dehnungen ...	<b>61</b>
<b>3.1.2</b>	Das Stoffgesetz.....	<b>62</b>
<b>3.1.3</b>	Gleichgewichtsbedingungen .....	<b>62</b>
<b>3.1.4</b>	Randbedingungen .....	<b>62</b>
<b>3.1.5</b>	Das Tonti-Diagramm des elastostatischen Problems....	<b>63</b>
<b>3.1.6</b>	Verknüpfung der Grundgleichungen der Elastostatik....	<b>64</b>
<b>3.2</b>	Das Prinzip virtueller Verrückungen.....	<b>65</b>
<b>3.2.1</b>	Das Prinzip vom Gesamtpotential .....	<b>65</b>
<b>4</b>	<b>Das Verfahren von Ritz</b>	
<b>4.1</b>	Aufprägen der wesentlichen Randbedingungen .....	<b>72</b>
<b>4.1.1</b>	Beispiel zu den wesentlichen Randbedingungen.....	<b>73</b>
<b>4.2</b>	Eindimensionale Stabprobleme .....	<b>75</b>
<b>4.2.1</b>	Diskretisierung der Formänderungsarbeit.....	<b>75</b>
<b>4.2.2</b>	Diskretisierung des Potentials der äußeren Lasten.....	<b>76</b>
<b>4.2.3</b>	Beispiel zum eindimensionalen Stab .....	<b>77</b>
<b>4.3</b>	Eindimensionale Balkenprobleme .....	<b>79</b>
<b>4.3.1</b>	Diskretisierung der Formänderungsarbeit.....	<b>79</b>
<b>4.3.2</b>	Diskretisierung des Potentials der äußeren Lasten.....	<b>79</b>
<b>4.3.3</b>	Variation des Gesamtpotentials .....	<b>80</b>
<b>4.4</b>	Scheibenproblem .....	<b>84</b>
<b>4.4.1</b>	Verschiebungsansätze .....	<b>85</b>
<b>4.4.2</b>	Wesentliche Randbedingungen .....	<b>85</b>
<b>4.4.3</b>	Dehnungen und Spannungen der Scheibe.....	<b>86</b>
<b>4.4.4</b>	Diskretisierung der Formänderungsarbeit.....	<b>87</b>
<b>4.4.5</b>	Diskretisierung des Potentials der äußeren Lasten.....	<b>88</b>
<b>4.4.6</b>	Variation des Gesamtpotentials .....	<b>89</b>
<b>4.4.7</b>	Kragbalken als Scheibenproblem.....	<b>89</b>

<b>5</b>	<b>Stabelemente</b>	
5.1	Das eindimensionale Stabelement .....	95
5.1.1	Problemdefinition .....	95
5.1.2	Das Tonti-Diagramm des Stabes .....	95
5.1.3	Das Funktional des Stabproblems .....	98
5.1.4	Diskretisierung des Funktionals des Stabes .....	98
5.1.5	Variation des Funktionals .....	101
5.1.6	Beispiel zum eindimensionalen Stab .....	103
5.1.7	Direkte Erstellung der Gesamtsteifigkeitsmatrix .....	109
5.1.8	Erstellung der Gesamtsteifigkeitsmatrix (allgemein) .....	111
5.1.9	Übungsbeispiele zum eindimensionalen Stab .....	113
5.1.10	Variable Querschnittsfläche des Stabelementes .....	115
5.1.11	Eindimensionales Stabelement mit $n$ Knoten .....	116
5.1.12	Eindimensionaler Stab mit drei bzw. vier Knoten .....	119
5.2	Das zwei- und dreidimensionale Stabelement .....	120
5.2.1	Das zweidimensionale Stabelement .....	120
5.2.2	Beispiel zum zweidimensionalen Stabproblem .....	123
5.2.3	Optimierung eines Stabtragwerkes .....	128
5.2.4	Übungsbeispiele zum zweidimensionalen Stab .....	131
5.2.5	Das dreidimensionale Stabelement .....	134
<b>6</b>	<b>Balkenelemente</b>	
6.1	Das eindimensionale Balkenelement .....	139
6.1.1	Problemdefinition .....	139
6.1.2	Dehnungen und Spannungen im Balken .....	140
6.1.3	Das Tonti-Diagramm des Bernoulli-Balkens .....	141
6.1.4	Funktional des Balkenproblems .....	142
6.1.5	Formfunktionen des eindimensionalen Balkens .....	143
6.1.6	Diskretisierung des Funktionals .....	145
6.1.7	Variation des diskretisierten Funktionals .....	147
6.1.8	Bilden der Steifigkeitsmatrix .....	148
6.1.9	Diskretisierung der Streckenlast .....	149
6.1.10	Schnittgrößen des Balkenelementes .....	151
6.2	Beispiel zum eindimensionalen Balken .....	153
6.2.1	Zweiseitig gelagerter Balken mit Streckenlast .....	153
6.2.2	Konvergenztest beim zweiknotigen Balkenelement .....	157
6.2.3	Realisierung des Gelenkes über eine Zwangsbedingung .....	159
6.3	Übungsbeispiele zum Bernoulli-Balken .....	161
6.4	Balkenelement mit $n$ Knoten und $p$ Freiheitsgraden pro Knoten .....	164
6.4.1	Das eindimensionale Balkenelement mit drei Knoten .....	167

<b>6.5</b>	<b>Das eindimensionale Balkenelement mit drei Freiheitsgraden pro Knoten .....</b>	<b>171</b>
<b>6.5.1</b>	<b>Balken mit unstetiger Krümmungsverteilung .....</b>	<b>174</b>
<b>6.6</b>	<b>Der Timoshenko-Balken .....</b>	<b>175</b>
<b>6.6.1</b>	<b>Schnittgrößen beim Timoshenko-Balken .....</b>	<b>181</b>
<b>6.6.2</b>	<b>„Locking-Effect“ .....</b>	<b>182</b>
<b>6.6.3</b>	<b>Übungsbeispiele zum Timoshenko-Balken.....</b>	<b>184</b>
<b>6.7</b>	<b>Der elastisch gelagerte Balken .....</b>	<b>185</b>
<b>6.7.1</b>	<b>Beispiel zum elastisch gelagerten Balken.....</b>	<b>187</b>
<b>6.8</b>	<b>Zweidimensionales Balkenelement .....</b>	<b>192</b>
<b>6.8.1</b>	<b>Freiheitsgrade des zweidimensionalen Balkens .....</b>	<b>192</b>
<b>6.8.2</b>	<b>Überlagerung der Dehnungen von Stab und Balken .....</b>	<b>192</b>
<b>6.8.3</b>	<b>Steifigkeitsmatrix .....</b>	<b>193</b>
<b>6.8.4</b>	<b>Transformation der Steifigkeitsmatrix.....</b>	<b>195</b>
<b>6.9</b>	<b>Beispiel und Übungsbeispiele zum zweidimensionalen Balken .....</b>	<b>198</b>
<b>6.9.1</b>	<b>Winkelproblem.....</b>	<b>198</b>
<b>6.9.2</b>	<b>Übungsbeispiele zum zweidimensionalen Balken .....</b>	<b>204</b>
<b>7</b>	<b>Scheibenproblem</b>	
<b>7.1</b>	<b>Problemdefinition .....</b>	<b>209</b>
<b>7.2</b>	<b>Die Grundgleichungen des Scheibenproblems .....</b>	<b>210</b>
<b>7.2.1</b>	<b>Die Feldgleichungen der Scheibe .....</b>	<b>211</b>
<b>7.3</b>	<b>Das Funktional des Scheibenproblems .....</b>	<b>212</b>
<b>7.4</b>	<b>Diskretisierung des Funktions mit drei Knoten.....</b>	<b>213</b>
<b>7.4.1</b>	<b>Formfunktionen des Dreieckelementes mit drei Knoten ..</b>	<b>213</b>
<b>7.4.2</b>	<b>Variation des diskretisierten Funktional .....</b>	<b>217</b>
<b>7.4.3</b>	<b>Diskretisierung der Volumenkräfte.....</b>	<b>219</b>
<b>7.4.4</b>	<b>Diskretisierung der Streckenlasten.....</b>	<b>222</b>
<b>7.4.5</b>	<b>Spannungen in der Scheibe .....</b>	<b>225</b>
<b>7.5</b>	<b>Beispiele zum Scheibenproblem .....</b>	<b>225</b>
<b>7.6</b>	<b>Übungsbeispiele zur Scheibe .....</b>	<b>232</b>
<b>8</b>	<b>Platten- und Schalenelemente</b>	
<b>8.1</b>	<b>Problemdefinition .....</b>	<b>237</b>
<b>8.2</b>	<b>Grundbeziehungen der Platte.....</b>	<b>237</b>
<b>8.2.1</b>	<b>Voraussetzungen bei der Kirchhoff-Platte .....</b>	<b>237</b>
<b>8.2.2</b>	<b>Kinematische Größen der Platte .....</b>	<b>239</b>
<b>8.2.3</b>	<b>Krümmungs-Momenten-Beziehung (Stoffgleichung) .....</b>	<b>240</b>
<b>8.2.4</b>	<b>Gleichgewichtsbeziehungen der Platte .....</b>	<b>242</b>
<b>8.2.5</b>	<b>Randbedingungen der Platte .....</b>	<b>242</b>
<b>8.3</b>	<b>Das Funktional der Platte .....</b>	<b>243</b>

<b>8.4</b>	Anforderungen an das Plattenelement .....	<b>245</b>
<b>8.4.1</b>	Kompatibilität (konforme Elemente).....	<b>245</b>
<b>8.4.2</b>	Starrkörperbewegung.....	<b>246</b>
<b>8.4.3</b>	Konstanter Dehnungszustand (Verzerrungszustand) .....	<b>247</b>
<b>8.4.4</b>	Einige Dreiecksplattenelemente .....	<b>247</b>
<b>8.5</b>	Diskretisierung des Funktionals .....	<b>249</b>
<b>8.5.1</b>	Ansatzfunktion für die Durchbiegung .....	<b>249</b>
<b>8.5.2</b>	Interpolationsbedingungen .....	<b>250</b>
<b>8.5.3</b>	Formfunktionen .....	<b>253</b>
<b>8.5.4</b>	Krümmungs-Verschiebungs-Beziehung.....	<b>253</b>
<b>8.5.5</b>	Steifigkeitsmatrix .....	<b>254</b>
<b>8.5.6</b>	Flächenlast .....	<b>255</b>
<b>8.5.7</b>	Streckenlast entlang einer Elementkante .....	<b>256</b>
<b>8.6</b>	Konvergenztest des Plattenelementes.....	<b>257</b>
<b>8.6.1</b>	Vergleich der Platten nach DKT und Specht .....	<b>258</b>
<b>8.7</b>	Schalenelement .....	<b>259</b>
<b>8.7.1</b>	Konvergenztest für verschiedene Schalenelementtypen ...	<b>265</b>
<b>9</b>	<b>Räumlicher Spannungszustand</b>	
<b>9.1</b>	Problemdefinition .....	<b>271</b>
<b>9.2</b>	Die Grundgleichungen des räumlichen Problems.....	<b>271</b>
<b>9.2.1</b>	Die Feldgleichungen des räumlichen Problems .....	<b>272</b>
<b>9.3</b>	Das Funktional des räumlichen Problems .....	<b>274</b>
<b>9.4</b>	Das vierknotige Tetraederelement .....	<b>275</b>
<b>9.4.1</b>	Volumenkoordinaten.....	<b>275</b>
<b>9.4.2</b>	Das vierknotige Tetraederelement in globalen Koordinaten	<b>276</b>
<b>9.5</b>	Diskretisierung des Funktionals .....	<b>276</b>
<b>9.5.1</b>	Formfunktionen des vierknotigen Tetraederelementes ....	<b>276</b>
<b>9.5.2</b>	Dehnungs-Verschiebungs-Beziehung .....	<b>278</b>
<b>9.5.3</b>	Spannungs-Verschiebungs-Beziehung .....	<b>281</b>
<b>9.5.4</b>	Variation des diskretisierten Funktional .....	<b>282</b>
<b>9.5.5</b>	Steifigkeitsmatrix des vierknotigen Tetraederelementes ..	<b>282</b>
<b>9.5.6</b>	Spannungen im vierknotigen Tetraederelement .....	<b>286</b>
<b>9.5.7</b>	Flächenlast beim vierknotigen Tetraederelement .....	<b>286</b>
<b>9.5.8</b>	Volumenkräfte beim vierknotigen Tetraederelement .....	<b>288</b>
<b>9.5.9</b>	Konvergenztest in den Verformungen .....	<b>289</b>
<b>9.5.10</b>	Konvergenztest in den Spannungen .....	<b>290</b>
<b>9.5.11</b>	Beispiel zu einem räumlichen Spannungsproblem.....	<b>291</b>
<b>10</b>	<b>Feldprobleme</b>	
<b>10.1</b>	Wärmeübertragung .....	<b>297</b>
<b>10.1.1</b>	Die Poisson'sche Gleichung .....	<b>297</b>

<b>10.1.2</b>	<b>Randbedingungen .....</b>	<b>297</b>
<b>10.1.3</b>	<b>Das Funktional der Wärmeübertragung .....</b>	<b>298</b>
<b>10.2</b>	<b>Eindimensionale Wärmeübertragung .....</b>	<b>299</b>
<b>10.2.1</b>	<b>Problemdefinition .....</b>	<b>299</b>
<b>10.2.2</b>	<b>Funktional des eindimensionalen Wärmeübertragungsproblems .....</b>	<b>299</b>
<b>10.2.3</b>	<b>Diskretisierung des Funktionals .....</b>	<b>300</b>
<b>10.2.4</b>	<b>Variation des Funktionals .....</b>	<b>304</b>
<b>10.2.5</b>	<b>Beispiel zur eindimensionalen Wärmeübertragung .....</b>	<b>305</b>
<b>10.2.6</b>	<b>Übungsbeispiele: Eindimensionale Wärmeübertragung ...</b>	<b>310</b>
<b>10.3</b>	<b>Zweidimensionale Wärmeübertragung .....</b>	<b>312</b>
<b>10.3.1</b>	<b>Problemdefinition .....</b>	<b>312</b>
<b>10.3.2</b>	<b>Randbedingungen bei der zweidimensionalen Wärmeübertragung .....</b>	<b>313</b>
<b>10.3.3</b>	<b>Diskretisierung des Funktionals .....</b>	<b>313</b>
<b>10.3.4</b>	<b>Variation des Funktionals .....</b>	<b>320</b>
<b>10.3.5</b>	<b>Beispiel zur zweidimensionalen Wärmeübertragung .....</b>	<b>322</b>
<b>10.3.6</b>	<b>Übungsbeispiele: Zweidimensionale Wärmeübertragung..</b>	<b>327</b>
<b>10.4</b>	<b>Torsion von prismatischen Körpern .....</b>	<b>331</b>
<b>10.4.1</b>	<b>Funktional des Torsionsproblems.....</b>	<b>334</b>
<b>10.5</b>	<b>Analogie: Wärmeübertragung zu Schichtenströmung....</b>	<b>337</b>
<b>10.5.1</b>	<b>Problembeschreibung .....</b>	<b>337</b>
<b>10.5.2</b>	<b>Grundgleichungen .....</b>	<b>337</b>
<b>10.5.3</b>	<b>Analogie der Randbedingungen .....</b>	<b>339</b>
<b>10.5.4</b>	<b>Analoges Funktional des Strömungsproblems .....</b>	<b>340</b>
<b>11</b>	<b>Eigenfrequenzen und Schwingungsformen von Stäben und Balken</b>	
<b>11.1</b>	<b>Der eindimensionale Stab .....</b>	<b>345</b>
<b>11.1.1</b>	<b>Massenmatrix des eindimensionalen Stabes.....</b>	<b>346</b>
<b>11.1.2</b>	<b>Eigenfrequenzen und Schwingungsformen.....</b>	<b>346</b>
<b>11.2</b>	<b>Beispiele zum eindimensionalen Stab .....</b>	<b>348</b>
<b>11.2.1</b>	<b>Einmassenschwinger .....</b>	<b>348</b>
<b>11.2.2</b>	<b>Zweimassenschwinger .....</b>	<b>349</b>
<b>11.2.3</b>	<b>Übungsbeispiel zur Stabschwingung.....</b>	<b>352</b>
<b>11.3</b>	<b>Der eindimensionale Balken .....</b>	<b>352</b>
<b>11.3.1</b>	<b>Massenmatrix des eindimensionalen Balkens .....</b>	<b>353</b>
<b>11.4</b>	<b>Beispiele zum eindimensionalen Balken .....</b>	<b>353</b>
<b>11.4.1</b>	<b>Beidseitig gelenkig gelagerte Balken .....</b>	<b>354</b>
<b>11.4.2</b>	<b>Kragbalken .....</b>	<b>356</b>
<b>11.4.3</b>	<b>Übungsbeispiel zur Balkenschwingung .....</b>	<b>359</b>

<b>12</b>	<b>Nichtlineare Probleme</b>	
12.1	Große Verformungen .....	363
12.1.1	Dehnungs-Verschiebungs-Beziehung .....	363
12.1.2	Dehnungen für Stab und Balken .....	364
12.1.3	Stab mit großen Verformungen .....	364
12.1.4	Balken mit großen Verformungen .....	367
12.2	Knicken von Stäben und Balken .....	371
12.2.1	Beispiel zum Stabknicken .....	373
12.2.2	Knickbeispiel I (Stab) .....	376
12.2.3	Beispiel zum Knicken von Balken .....	376
12.2.4	Die vier Eulerfälle .....	379
12.2.5	Knickbeispiel II (Balken) .....	380
12.2.6	Knickbeispiel III (Dreiknotiges Balkenelement) .....	380
<b>13</b>	<b>CALL_for_FEM</b>	
13.1	Übersicht über CALL_for_FEM .....	385
13.1.1	Installation von CALL_for_FEM auf dem Rechner .....	386
13.1.2	Updates zu CALL_for_FEM .....	386
13.1.3	Lösungen zu den Übungsbeispielen .....	387
13.1.4	Hinweise auf die Lernsoftware durch Icons .....	387
13.1.5	Video-Tutorials als Lernmittel .....	387
13.2	Numerische Programme .....	388
13.3	Symbolische Programme .....	390
13.3.1	Symbolische Programme in Maple und Python .....	390
13.3.2	Symbolische Programme in Maple .....	392
13.4	Ausführliche Programmbeschreibungen .....	393
13.4.1	Das Programm InterFEM .....	393
13.4.2	Das Verfahren von Ritz für den eindimensionalen Stab (Ritz_Stab) .....	394
13.4.3	Das Verfahren von Ritz für den Balken (Ritz_Balken) .....	396
13.4.4	Das Verfahren von Ritz für die Scheibe (Ritz_Scheibe) ..	397
13.4.5	Eindimensionales Stabelement (Stab_1D) .....	399
13.4.6	Eindimensionales Balkenelement (Balken_1D) .....	402
13.4.7	Timoshenko-Balken (Timoshenko_1D) .....	403
13.4.8	Dreiecksscheibenelement (Scheibe_Dreieck) .....	403
13.4.9	Plattenelement (Platte) .....	404
13.4.10	Knicken eines eindimensionalen Balkens (Knicken_Balken) .....	405
13.4.11	Eigenfrequenzen und Schwingungsform des Balkens (Dynamik_Balken) .....	407
13.4.12	Eindimensionale Feldprobleme (Feldprobleme_1D) .....	407
13.4.13	Zweidimensionale Feldprobleme (Feldprobleme_2D) .....	408

<b>14</b>	<b>Beispiele zu den Programmen</b>	
<b>14.1</b>	Elastisch gelagerter Balken.....	<b>413</b>
<b>14.2</b>	Scheibe gestützt durch eine Feder.....	<b>414</b>
<b>14.3</b>	Wärmeübertragung (Torsion) eines gleichseitigen Dreiecks (Quadrates).....	<b>416</b>
	<b>Verwendete Formelzeichen und Symbole</b> .....	<b>421</b>
	<b>Literatur</b> .....	<b>433</b>
	<b>Sachverzeichnis</b> .....	<b>437</b>
	<b>Programme</b> .....	<b>445</b>