

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	
1.1	Vorgehensweise bei der FEM	3
1.2	Verschiedene Elementtypen	5
1.3	Beispiele zur Finite-Elemente-Methode	10
1.3.1	Beispiel zu nichtlinearen Problemen	10
1.3.2	Beispiele zur Optimierung	11
2	Mathematische Grundlagen	
2.1	Schreibweisen	19
2.2	Vektoren	20
2.2.1	Definition eines n dimensionalen Vektors	20
2.2.2	Skalarprodukt	20
2.2.3	Kreuzprodukt	20
2.2.4	Ableitung von Vektoren	21
2.2.5	Der Nabla-Vektor	22
2.2.6	Der Gradientenvektor	22
2.2.7	Divergenz und Laplace-Operator	23
2.3	Matrizen	23
2.3.1	Definition einer Matrix	23
2.3.2	Rechenregeln	24
2.3.3	Transponierte Matrix	26
2.3.4	Orthogonale Matrix	27
2.4	Die Dyade (Tensor zweiter Stufe)	27
2.4.1	Differentialoperator	28
2.4.2	Tensor höherer Stufe	28
2.5	Felder	28
2.5.1	Skalarfelder	28
2.5.2	Das Vektorfeld als Gradient des Skalarfeldes	29
2.5.3	Das dyadische Feld	29
2.6	Lineare Transformation	32
2.6.1	Transformation eines Vektors	32
2.6.2	Transformation einer Dyade (Tensor zweiter Stufe)	34
2.6.3	Beispiele zur Transformation	34
2.7	Funktionale	36
2.7.1	Diskretisierung des Funktional	38
2.8	Dreieckskoordinaten	39
2.8.1	Ableitungen in Dreieckskoordinaten (Jakobi-Matrix)	41
2.8.2	Integration in Dreieckskoordinaten	44
2.9	Numerische Integration (Quadratur)	45
2.9.1	Numerische Integration für eindimensionale Probleme ...	45

2.9.2	Numerische Integration in Dreieckskoordinaten	46
2.10	Lineare Gleichungssysteme bei der FEM	48
2.10.1	Definition der Bandbreite	48
2.10.2	Rechenzeiten zur Lösung linearer Gleichungssysteme	49
2.10.3	Positiv definite Matrix	50
2.10.4	Das Verfahren von Cholesky	51
2.10.5	Kondition linearer Gleichungssysteme	53
2.10.6	Zwangsbedingungen bei linearen Gleichungssystemen	55
2.11	Näherungsfehler bei der FEM	57
2.12	Das Tonti-Diagramm.....	58
3	Beschreibung elastostatischer Probleme	
3.1	Die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie.....	61
3.1.1	Verknüpfung der Verschiebungen mit den Dehnungen ...	61
3.1.2	Das Stoffgesetz.....	62
3.1.3	Gleichgewichtsbedingungen	62
3.1.4	Randbedingungen	62
3.1.5	Das Tonti-Diagramm des elastostatischen Problems.....	63
3.1.6	Verknüpfung der Grundgleichungen der Elastostatik.....	64
3.2	Das Prinzip virtueller Verrückungen.....	65
3.2.1	Das Prinzip vom Gesamtpotential	65
4	Das Verfahren von Ritz	
4.1	Aufprägen der wesentlichen Randbedingungen.....	72
4.1.1	Beispiel zu den wesentlichen Randbedingungen.....	73
4.2	Eindimensionale Stabprobleme	75
4.2.1	Diskretisierung der Formänderungsarbeit.....	75
4.2.2	Diskretisierung des Potentials der äußeren Lasten.....	76
4.2.3	Beispiel zum eindimensionalen Stab	77
4.3	Eindimensionale Balkenprobleme	79
4.3.1	Diskretisierung der Formänderungsarbeit.....	79
4.3.2	Diskretisierung des Potentials der äußeren Lasten.....	79
4.3.3	Variation des Gesamtpotentials	80
4.4	Scheibenproblem	84
4.4.1	Verschiebungsansätze	85
4.4.2	Wesentliche Randbedingungen	85
4.4.3	Dehnungen und Spannungen der Scheibe.....	86
4.4.4	Diskretisierung der Formänderungsarbeit.....	87
4.4.5	Diskretisierung des Potentials der äußeren Lasten.....	88
4.4.6	Variation des Gesamtpotentials	89
4.4.7	Kragbalken als Scheibenproblem.....	89

5	Stabelemente	
5.1	Das eindimensionale Stabelement	95
5.1.1	Problemdefinition	95
5.1.2	Das Tonti-Diagramm des Stabes	95
5.1.3	Das Funktional des Stabproblems	98
5.1.4	Diskretisierung des Funktional des Stabes	98
5.1.5	Variation des Funktional	101
5.1.6	Beispiel zum eindimensionalen Stab.....	103
5.1.7	Direkte Erstellung der Gesamtsteifigkeitsmatrix	109
5.1.8	Erstellung der Gesamtsteifigkeitsmatrix (allgemein)	111
5.1.9	Übungsbeispiele zum eindimensionalen Stab	113
5.1.10	Variable Querschnittsfläche des Stabelementes	115
5.1.11	Eindimensionales Stabelement mit n Knoten	116
5.1.12	Eindimensionaler Stab mit drei bzw. vier Knoten	119
5.2	Das zwei- und dreidimensionale Stabelement	120
5.2.1	Das zweidimensionale Stabelement	120
5.2.2	Beispiel zum zweidimensionalen Stabproblem	123
5.2.3	Optimierung eines Stabtragwerkes.....	128
5.2.4	Übungsbeispiele zum zweidimensionalen Stab.....	131
5.2.5	Das dreidimensionale Stabelement	134
6	Balkenelemente	
6.1	Das eindimensionale Balkenelement.....	139
6.1.1	Problemdefinition	139
6.1.2	Dehnungen und Spannungen im Balken	140
6.1.3	Das Tonti-Diagramm des Bernoulli-Balkens	141
6.1.4	Funktional des Balkenproblems	142
6.1.5	Formfunktionen des eindimensionalen Balkens	143
6.1.6	Diskretisierung des Funktional	145
6.1.7	Variation des diskretisierten Funktional	147
6.1.8	Bilden der Steifigkeitsmatrix	148
6.1.9	Diskretisierung der Streckenlast.....	149
6.1.10	Schnittgrößen des Balkenelementes	151
6.2	Beispiel zum eindimensionalen Balken	153
6.2.1	Zweiseitig gelagerter Balken mit Streckenlast.....	153
6.2.2	Konvergenztest beim zweiknotigen Balkenelement.....	157
6.2.3	Realisierung des Gelenkes über eine Zwangsbedingung...	159
6.3	Übungsbeispiele zum Bernoulli-Balken.....	161
6.4	Balkenelement mit n Knoten und p Freiheitsgraden pro Knoten	164
6.4.1	Das eindimensionale Balkenelement mit drei Knoten	167

6.5	Das eindimensionale Balkenelement mit drei Freiheitsgraden pro Knoten	171
6.5.1	Balken mit unstetiger Krümmungsverteilung	174
6.6	Der Timoshenko-Balken	175
6.6.1	Schnittgrößen beim Timoshenko-Balken	181
6.6.2	„Locking-Effect“	182
6.6.3	Übungsbeispiele zum Timoshenko-Balken.....	184
6.7	Der elastisch gelagerte Balken	185
6.7.1	Beispiel zum elastisch gelagerten Balken.....	187
6.8	Zweidimensionales Balkenelement	192
6.8.1	Freiheitsgrade des zweidimensionalen Balkens	192
6.8.2	Überlagerung der Dehnungen von Stab und Balken	192
6.8.3	Steifigkeitsmatrix	193
6.8.4	Transformation der Steifigkeitsmatrix.....	195
6.9	Beispiel und Übungsbeispiele zum zweidimensionalen Balken	198
6.9.1	Winkelproblem.....	198
6.9.2	Übungsbeispiele zum zweidimensionalen Balken	204
7	Scheibenproblem	
7.1	Problemdefinition	209
7.2	Die Grundgleichungen des Scheibenproblems	210
7.2.1	Die Feldgleichungen der Scheibe	211
7.3	Das Funktional des Scheibenproblems	212
7.4	Diskretisierung des Funktional mit drei Knoten.....	213
7.4.1	Formfunktionen des Dreieckselementes mit drei Knoten .	213
7.4.2	Variation des diskretisierten Funktional	217
7.4.3	Diskretisierung der Volumenkräfte.....	219
7.4.4	Diskretisierung der Streckenlasten	222
7.4.5	Spannungen in der Scheibe	225
7.5	Beispiele zum Scheibenproblem	225
7.6	Übungsbeispiele zur Scheibe	232
8	Platten- und Schalenelemente	
8.1	Problemdefinition	237
8.2	Grundbeziehungen der Platte.....	237
8.2.1	Voraussetzungen bei der Kirchhoff-Platte	237
8.2.2	Kinematische Größen der Platte	239
8.2.3	Krümmungs-Momenten-Beziehung (Stoffgleichung)	240
8.2.4	Gleichgewichtsbeziehungen der Platte	242
8.2.5	Randbedingungen der Platte	242
8.3	Das Funktional der Platte	243

8.4	Anforderungen an das Plattenelement	245
8.4.1	Kompatibilität (konforme Elemente)	245
8.4.2	Starrkörperbewegung	246
8.4.3	Konstanter Dehnungszustand (Verzerrungszustand)	247
8.4.4	Einige Dreiecksplattenelemente	247
8.5	Diskretisierung des Funktional	249
8.5.1	Ansatzfunktion für die Durchbiegung	249
8.5.2	Interpolationsbedingungen	250
8.5.3	Formfunktionen	253
8.5.4	Krümmungs-Verschiebungs-Beziehung	253
8.5.5	Steifigkeitsmatrix	254
8.5.6	Flächenlast	255
8.5.7	Streckenlast entlang einer Elementkante	256
8.6	Konvergenztest des Plattenelementes	257
8.6.1	Vergleich der Platten nach DKT und Specht	258
8.7	Schalenelement	259
8.7.1	Konvergenztest für verschiedene Schalenelementtypen ...	265
9	Räumlicher Spannungszustand	
9.1	Problemdefinition	271
9.2	Die Grundgleichungen des räumlichen Problems	271
9.2.1	Die Feldgleichungen des räumlichen Problems	272
9.3	Das Funktional des räumlichen Problems	274
9.4	Das vierknotige Tetraederelement	275
9.4.1	Volumenkoordinaten	275
9.4.2	Das vierknotige Tetraederelement in globalen Koordinaten	276
9.5	Diskretisierung des Funktional	276
9.5.1	Formfunktionen des vierknotigen Tetraederelementes ...	276
9.5.2	Dehnungs-Verschiebungs-Beziehung	278
9.5.3	Spannungs-Verschiebungs-Beziehung	281
9.5.4	Variation des diskretisierten Funktional	282
9.5.5	Steifigkeitsmatrix des vierknotigen Tetraederelementes ..	282
9.5.6	Spannungen im vierknotigen Tetraederelement	286
9.5.7	Flächenlast beim vierknotigen Tetraederelement	286
9.5.8	Volumenkräfte beim vierknotigen Tetraederelement	288
9.5.9	Konvergenztest in den Verformungen	289
9.5.10	Konvergenztest in den Spannungen	290
9.5.11	Beispiel zu einem räumlichen Spannungsproblem	291
10	Feldprobleme	
10.1	Wärmeübertragung	297
10.1.1	Die Poisson'sche Gleichung	297

10.1.2	Randbedingungen	297
10.1.3	Das Funktional der Wärmeübertragung	298
10.2	Eindimensionale Wärmeübertragung	299
10.2.1	Problemdefinition	299
10.2.2	Funktional des eindimensionalen Wärmeübertragungsproblems	299
10.2.3	Diskretisierung des Funktional	300
10.2.4	Variation des Funktional	304
10.2.5	Beispiel zur eindimensionalen Wärmeübertragung	305
10.2.6	Übungsbeispiele: Eindimensionale Wärmeübertragung ...	310
10.3	Zweidimensionale Wärmeübertragung	312
10.3.1	Problemdefinition	312
10.3.2	Randbedingungen bei der zweidimensionalen Wärmeübertragung	313
10.3.3	Diskretisierung des Funktional	313
10.3.4	Variation des Funktional	320
10.3.5	Beispiel zur zweidimensionalen Wärmeübertragung	322
10.3.6	Übungsbeispiele: Zweidimensionale Wärmeübertragung ..	327
10.4	Torsion von prismatischen Körpern	331
10.4.1	Funktional des Torsionsproblems	334
10.5	Analogie: Wärmeübertragung zu Schichtenströmung	337
10.5.1	Problembeschreibung	337
10.5.2	Grundgleichungen	337
10.5.3	Analogie der Randbedingungen	339
10.5.4	Analoges Funktional des Strömungsproblems	340
11	Eigenfrequenzen und Schwingungsformen von Stäben und Balken	
11.1	Der eindimensionale Stab	345
11.1.1	Massenmatrix des eindimensionalen Stabes	346
11.1.2	Eigenfrequenzen und Schwingungsformen	346
11.2	Beispiele zum eindimensionalen Stab	348
11.2.1	Einmassenschwinger	348
11.2.2	Zweimassenschwinger	349
11.2.3	Übungsbeispiel zur Stabschwingung	352
11.3	Der eindimensionale Balken	352
11.3.1	Massenmatrix des eindimensionalen Balkens	353
11.4	Beispiele zum eindimensionalen Balken	353
11.4.1	Beidseitig gelenkig gelagerte Balken	354
11.4.2	Kragbalken	356
11.4.3	Übungsbeispiel zur Balkenschwingung	359

12	Nichtlineare Probleme	
12.1	Große Verformungen	363
12.1.1	Dehnungs-Verschiebungs-Beziehung	363
12.1.2	Dehnungen für Stab und Balken	364
12.1.3	Stab mit großen Verformungen	364
12.1.4	Balken mit großen Verformungen	367
12.2	Knicken von Stäben und Balken	371
12.2.1	Beispiel zum Stabknicken	373
12.2.2	Knickbeispiel I (Stab)	376
12.2.3	Beispiel zum Knicken von Balken	376
12.2.4	Die vier Eulerfälle	379
12.2.5	Knickbeispiel II (Balken)	380
12.2.6	Knickbeispiel III (Dreiknotiges Balkenelement)	380
13	CALL_for_FEM	
13.1	Übersicht über CALL_for_FEM	385
13.1.1	Installation von CALL_for_FEM auf dem Rechner	386
13.1.2	Updates zu CALL_for_FEM	386
13.1.3	Lösungen zu den Übungsbeispielen	387
13.1.4	Hinweise auf die Lernsoftware durch Icons	387
13.1.5	Video-Tutorials als Lernmittel	387
13.2	Numerische Programme	388
13.3	Symbolische Programme	390
13.3.1	Symbolische Programme in Maple und Python	390
13.3.2	Symbolische Programme in Maple	392
13.4	Ausführliche Programmbeschreibungen	393
13.4.1	Das Programm InterFEM	393
13.4.2	Das Verfahren von Ritz für den eindimensionalen Stab (Ritz_Stab)	394
13.4.3	Das Verfahren von Ritz für den Balken (Ritz_Balken)	396
13.4.4	Das Verfahren von Ritz für die Scheibe (Ritz_Scheibe) ..	397
13.4.5	Eindimensionales Stabelement (Stab_1D)	399
13.4.6	Eindimensionales Balkenelement (Balken_1D)	402
13.4.7	Timoshenko-Balken (Timoshenko_1D)	403
13.4.8	Dreiecksscheibenelement (Scheibe_Dreieck)	403
13.4.9	Plattenelement (Platte)	404
13.4.10	Knicken eines eindimensionalen Balkens (Knicken_Balken)	405
13.4.11	Eigenfrequenzen und Schwingungsform des Balkens (Dy- namik_Balken)	407
13.4.12	Eindimensionale Feldprobleme (Feldprobleme_1D)	407
13.4.13	Zweidimensionale Feldprobleme (Feldprobleme_2D)	408

14	Beispiele zu den Programmen	
14.1	Elastisch gelagerter Balken.....	413
14.2	Scheibe gestützt durch eine Feder.....	414
14.3	Wärmeübertragung (Torsion) eines gleichseitigen Dreiecks (Quadrates).....	416
	Verwendete Formelzeichen und Symbole	421
	Literatur	433
	Sachverzeichnis	437
	Programme	445