

Auf einen Blick

TEIL I Grundlagen

1	Mengenweise Mengen	24
2	Gesetze der Algebra	32
3	(Un-)gleichungen	56
4	Funktionen im kartesischen Koordinatensystem	86
5	e und log	110
6	Sinus und Cosinus	128
7	Wo ist meine Einheit?	148
8	Flächen und Räume	164
9	Vielleicht sechs Richtige	178
10	Herrn Booles Algebra	198
11	Was zu beweisen ist	208

TEIL II Analysis

12	Folgen und Grenzwerte	220
13	Reihen	230
14	Stetigkeit und Monotonie	238
15	Funktionen ableiten	254
16	Noch mehr Funktionen ableiten	274
17	Eigenschaften von Funktionen	286
18	Integralrechnung	316
19	Die Bewegungsgleichung	344
20	Die Differentialgleichung erster Ordnung	358
21	Das Pünktchen auf dem i	372
22	Hin und wieder zurück	388
23	Mantelflächen und Kurvenlängen integrieren	404
24	Nicht-kartesische Koordinatensysteme	414

TEIL III Lineare Algebra

25	Vektorrechnung	428
26	Lineare Gleichungssysteme	444
27	Willkommen in der Matrix	458
28	Eigenwerte, Determinanten und Co.	472
29	Besondere Matrizen anwenden	492
30	Mehrdimensionale Analysis	504
31	Numerische Verfahren	518
32	Analytische Geometrie	536

Inhalt

Einleitung	21
------------------	----

TEIL I Grundlagen

1 Mengenweise Mengen	24
1.1 Testen Sie sich selbst	25
1.2 Mengen und Elemente	25
Vereinigungs- und Schnittmengen	27
Unter- und Obermengen	27
Vordefinierte Mengen	28
1.3 Entspannungsübungen	30
1.4 Lösungen	30
2 Gesetze der Algebra	32
2.1 Testen Sie sich selbst	33
2.2 Gesetze, die jeder kennt	34
Vertauschen (fast) nach Belieben	34
Das Verteilungsgesetz	35
Zig Prozent auf alles!	37
Zinsen, bitte	37
Die Minusklammer	38
Binomische Formeln	39
2.3 Brüche, gemischt und dezimal	40
Gemeine Brüche	40
Kürzen und erweitern	40
Rechnen mit Brüchen	42
Gemischte Brüche	44
Dezimalkommazahlen	44
2.4 Potenzen und Wurzeln	47
Die Potenzgesetze	47

	Umkehren von Potenzen	49
	Wurzeln und gebrochene Exponenten	49
2.5	Entspannungsübungen	51
2.6	Lösungen	52
3	(Un-)gleichungen	56
3.1	Testen Sie sich selbst	57
3.2	Einfache Gleichungen und Ungleichungen	58
	Gleichungen umformen	58
	Ungleichungen lösen	60
3.3	Quadratische Gleichungen und Bruchgleichungen	61
	Die Wurzel ziehen	62
	Quadratische Ergänzung	62
	Bruchgleichungen	64
3.4	Gleichungssysteme	65
	Lineare Gleichungssysteme	65
	Das Gleichsetzungsverfahren	65
	Das Additions- bzw. Subtraktionsverfahren	67
	Das Einsetzungsverfahren	67
3.5	Sachaufgaben	68
	Lösung mit System	69
3.6	Gleichungen lösen mit dem PC	71
	Bühne frei für Sage	71
	Gleichungen lösen mit Sage	72
	Gleichungen und mehr mit GeoGebra	74
3.7	Entspannungsübungen	76
3.8	Lösungen	77
4	Funktionen im kartesischen Koordinatensystem	86
4.1	Testen Sie sich selbst	87
4.2	Das Achsenkreuz	87

4.3	Lineare Funktionen	89
	Graphen zeichnen	89
	Plotten mit Sage	90
	Funktionen plotten mit GeoGebra	91
4.4	Parabeln	92
	Die Normalparabel	92
	Noch mehr Parabeln	94
	Rechenspiele mit Parabeln	95
4.5	Wurzel- und andere Funktionen	98
	Halbe Exponenten	98
	Die (Halb-)Kreisfunktion	99
4.6	Entspannungsübungen	101
4.7	Lösungen	102
5	e und $\log$	110
5.1	Testen Sie sich selbst!	111
5.2	Mehr, mehr, mehr!	111
	Eulers Zahl	112
	Weniger, aber niemals nichts	116
5.3	Logarithmen und ihre Regeln	117
	Logarithmen zu verschiedenen Basen	117
5.4	Entspannungsübungen	121
5.5	Lösungen	122
6	Sinus und Cosinus	128
6.1	Testen Sie sich selbst	129
6.2	Rechtwinklige Dreiecke	130
	Die drei Seiten	130
	Pythagoreische Tripel	132
	Dreiecke in GeoGebra	132
6.3	Der Einheitskreis	134
	Das Eckige muss in das Runde	134
	Unterwegs im Einheitskreis	135

	Periodizität	139
	Der Tangens	140
	Formeln mit Sinus und Cosinus	141
6.4	Entspannungsübungen	143
6.5	Lösungen	144
7	Wo ist meine Einheit?	148
7.1	Testen Sie sich selbst	149
7.2	Hoch, weit, schwer	149
	Ur-Maße	149
	Maße und ihre Einheiten	151
7.3	Von piko bis Tera	153
	Das geht doch genauer	153
	Das geht doch genauer ... (Version für Computer, Roboter & Co.)	155
7.4	Wahnsinnig große (und kleine) Zahlen	155
	Exponentialdarstellung mit Zehnerpotenzen	155
7.5	Runden, aber sinnvoll	156
	Runden oder nicht runden, das ist hier die Frage	157
	Symmetrisch runden	157
7.6	Entspannungsübungen	159
7.7	Lösungen	160
8	Flächen und Räume	164
8.1	Testen Sie sich selbst	165
8.2	Flächeninhalt und Umfang	165
	Flächeninhalte berechnen	165
	Flächenformeln zusammengefasst	166
	Umfang berechnen	168
8.3	Volumen und Oberfläche	169
	Volumeneinheiten	169
	Volumina von Körpern	170
	Oberflächen von Körpern	171

8.4	Entspannungsübungen	173
8.5	Lösungen	174
9	Vielleicht sechs Richtige	178
9.1	Testen Sie sich selbst	179
9.2	Statistik	179
	Arithmetisches Mittel	180
	Geometrisches Mittel	182
	Median	182
	Standardabweichung und Varianz	183
	Normalverteilung	186
9.3	Wahrscheinlichkeit	188
	Addition und Produkt	188
	Laplace-Experimente	189
	Würfel haben keine Erinnerung: Poisson-Verteilungen	190
	Permutationen	192
9.4	Entspannungsübungen	195
9.5	Lösungen	195
10	Herrn Booles Algebra	198
10.1	Testen Sie sich selbst	199
10.2	Aussagenlogik	199
	Und und oder nicht	199
	Exklusives Oder	200
	Rechengesetze der booleschen Algebra	201
10.3	Wie Computer rechnen	202
	Digitale Zahlensysteme	203
10.4	Entspannungsübungen	206
10.5	Lösungen	206

11	Was zu beweisen ist	208
11.1	Mathematische Beweise	209
11.2	Vollständige Induktion	209
	Das Induktionsprinzip	209
11.3	Indirekter Beweis	211
	Beweis durch Widerspruch	212
11.4	Entspannungsübung	215
11.5	Lösungen	215

TEIL II Analysis

12	Folgen und Grenzwerte	220
12.1	Zahlenfolgen	221
	Zahlen, Zahlen und kein Ende	221
	Rekursive Folgendefinitionen	222
	Geometrische Folgen	223
12.2	Grenzwerte und Konvergenz	224
	Wohin laufen sie denn?	224
	Das Verhalten von Nullfolgen	225
	Konvergenz	226
12.3	Entspannungsübungen	227
12.4	Lösungen	227
13	Reihen	230
13.1	Unendliche Summen	231
	Partialsummen und Summenfolgen	231
	Konvergente Reihen	232
13.2	Besondere Reihen	233
	Die geometrische Reihe	233
	Die harmonische Reihe	235
	Noch mehr konvergente Reihen	236

13.3	Entspannungsübungen	237
13.4	Lösungen	237
14	Stetigkeit und Monotonie	238
14.1	Grenzwerte von Funktionen	239
	Lückenfüller	240
	Dreifolgensatz	242
	Von Epsilon und Delta	243
	Grenzwerte im Unendlichen	243
	Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen	245
14.2	Stetige Funktionen	246
	Definition der Stetigkeit	246
	Sätze über stetige Funktionen	247
	Monotonie	248
14.3	Entspannungsübungen	250
14.4	Lösungen	250
15	Funktionen ableiten	254
15.1	Umschalten auf wahnsinnige Geschwindigkeit!	255
	Ort, Zeit, Tempo	255
	Momentane Geschwindigkeit	257
15.2	Die Steigung der Tangenten	258
	Klitzekleine Steigungsdreiecke	258
	Differenzierbarkeit und Stetigkeit	260
	Die erste Ableitung	260
15.3	Ableitungsregeln	262
	Summenregel	263
	Produktregel	263
	Ableitung der Hyperbelfunktion	264
	Kettenregel	265
	Quotientenregel	266
	Potenzregel und Polynome ableiten	267
15.4	Entspannungsübungen	269
15.5	Lösungen	270

16	Noch mehr Funktionen ableiten	274
16.1	Exponentialfunktion ableiten	275
	Erste Ableitung von e^x	275
	Ableitung der Umkehrfunktion	276
	Ableiten des Logarithmus	277
	Ableiten von Potenzen mit reellem Exponenten	278
16.2	Trigonometrische Funktionen	279
	Sinus und Cosinus	279
	Ableitung des Tangens	280
16.3	Entspannungsübungen	283
16.4	Lösungen	283
17	Eigenschaften von Funktionen	286
17.1	Funktionengeometrie	287
	Spiegelsymmetrie	287
	Punktsymmetrie	288
	Asymptotisches Verhalten	289
	Faustregeln für gebrochen rationale Funktionen	292
	Extremstellen	293
	Extremwertaufgaben	294
	Sattel- und Wendepunkte	296
17.2	Königsdisziplin Kurvendiskussion	298
17.3	Funktionen à la carte	302
	Selbstgestrickt	302
	Zufall, selfmade	306
17.4	Entspannungsübungen	309
17.5	Lösungen	309
18	Integralrechnung	316
18.1	Das riemannsche Integral	317
	Eine Frage der Fläche	317
	Ober- und Untersummen	319

18.2	Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	320
	Das unbestimmte Integral	320
	Stammfunktionen	321
	Der Fundamentalsatz der Analysis	322
	Potenzen und Polynome integrieren	324
	Beispiel: Integration einer Fläche mit GeoGebra	325
	Partielle Integration	326
	Substitutionsregel	327
	Uneigentliche Integrale	331
	Integralkriterium	333
18.3	Anwendungen der Integration	334
	Integrale in der Physik	334
	Extremwertaufgaben mit Flächen	335
	Integrieren mit Sage	337
18.4	Entspannungsübungen	339
18.5	Lösungen	340
19	Die Bewegungsgleichung	344
19.1	Kraft und Beschleunigung	345
	Kraftlos	345
	Konstante Kraft	346
	Der Fall des Apfels	347
19.2	Die zweite Dimension	349
	Nur einen Steinwurf entfernt	349
	Die Wurfparabel	350
	Der optimale Wurfwinkel	351
19.3	Entspannungsübungen	355
19.4	Lösungen	355
20	Die Differentialgleichung erster Ordnung	358
20.1	Wo Differentialgleichungen vorkommen	359
	Strom, Spannung und Co.	359
	Auf die Bremse treten	361
	Tierpopulationen	361

20.2	Die Differentialgleichung erster Ordnung lösen	362
	Allgemeine Lösung	362
	Anfangsbedingungen und Randwerte	363
	Inhomogene Differentialgleichung lösen	365
20.3	Entspannungsübungen	370
20.4	Lösungen	370
21	Das Pünktchen auf dem i	372
21.1	Die komplexen Zahlen	373
	Schreibweisen	373
	Rechenregeln	374
	Der Fundamentalsatz der Algebra	375
	Multiplikation komplexer Zahlen	375
	Division komplexer Zahlen	376
21.2	Die komplexe Zahlenebene	377
	Komplexe Zahlen in der gaußschen Ebene	377
	Polarform	378
	Multiplikation in Polarform	380
21.3	Die eulersche Formel	382
	Immer im Kreis herum	382
	Die eulersche Identität	383
21.4	Funktionen und Folgen mit komplexen Zahlen	384
	Komplexe Funktionen ableiten	384
	Die Mandelbrotmenge	384
21.5	Entspannungsübungen	386
21.6	Lösungen	387
22	Hin und wieder zurück	388
22.1	Der harmonische Oszillator	389
	Nicht nur für Pendler	389
	Der Schwingkreis	391
22.2	Differentialgleichung zweiter Ordnung	392
	Lösung mit Eulers Formel	393

	Lösung mit Sinus-Cosinus-Ansatz	395
	Anfangs- und Randbedingungen	395
	Differentialgleichung mit Dämpfung	396
22.3	Entspannungsübungen	400
22.4	Lösungen	400
23	Mantelflächen und Kurvenlängen integrieren	404
23.1	Kurvenlängen integrieren	405
	Sehr kleine Hypotenusen	405
23.2	Mantelflächenintegrale	408
	Rotationskörper	408
23.3	Entspannungsübungen	411
23.4	Lösungen	411
24	Nicht-kartesische Koordinatensysteme	414
24.1	Polarkoordinaten	415
	Zweidimensionale Kreiskoordinaten	415
	Umrechnung zwischen kartesischen und Polarkoordinaten	416
	Polarkoordinaten mit GeoGebra	417
	Infinitesimalrechnung in Polarkoordinaten	418
24.2	Dreidimensionale Koordinatensysteme	420
	Zylinderkoordinaten	420
	Kugelkoordinaten	421
24.3	Entspannungsübungen	424
24.4	Lösungen	424

TEIL III Lineare Algebra

25	Vektorrechnung	428
25.1	Vektoren in der euklidischen Ebene	429
	Schreibweisen	429
	Eigenschaften von Vektoren	430

	Vektoren addieren	431
	Skalarmultiplikation	432
	Vektorrechnung mit GeoGebra	433
25.2	Die Basis	434
	Lineare Unabhängigkeit	434
	Einheitsvektoren und Basis	436
	Vektorrechnung mit Sage	437
25.3	Entspannungsübungen	439
25.4	Lösungen	440
26	Lineare Gleichungssysteme	444
26.1	Das Gauß-Verfahren	445
	Umformen gen Dreiecksform	445
	Matrix-Schreibweise	447
	Gleichungssysteme lösen mit Sage	447
26.2	Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme	448
	Bedingungen für Lösbarkeit	448
	Lösbarkeit homogener Gleichungssysteme	449
	Die Determinante	449
	Gleichungssysteme lösen mit GeoGebra	451
	Die Regel von Sarrus	452
	Cramersche Regel	453
26.3	Entspannungsübungen	455
26.4	Lösungen	455
27	Willkommen in der Matrix	458
27.1	Lineare Abbildungen	459
	Definition linearer Abbildungen	459
	Eigenschaften linearer Abbildungen	460
	Kern, Bild und Dimensionsformel	461
	Praktische Anwendungen	462
27.2	Verknüpfung linearer Abbildungen	462
	Summen von Matrizen	463
	Vielfache von Matrizen	463

	Matrizenmultiplikation	463
	Die inverse Abbildung	465
	Matrizenrechnung mit Sage	467
	Matrixoperationen mit GeoGebra	468
27.3	Entspannungsübungen	470
27.4	Lösungen	470
28	Eigenwerte, Determinanten und Co.	472
28.1	Matrizen unter der Lupe	473
	Determinante und Invertierbarkeit	473
	Basiswechselmatrix	474
	Basiswechsel mit GeoGebra	475
28.2	Eigenwerte	476
	Das Eigenwertproblem	476
	Berechnung von Eigenwerten	477
	Eigenräume	479
	Diagonalisieren	480
28.3	Produkte	482
	Skalarprodukt	483
	Kreuzprodukt	485
28.4	Entspannungsübungen	487
28.5	Lösungen	488
29	Besondere Matrizen anwenden	492
29.1	Geometrische Transformationen	493
	Orthonormalsysteme	493
	Isometrien	493
	Spiegelmatrizen	494
	Drehmatrizen	495
	Drehmatrix mit GeoGebra	496
	Koordinatentransformation	497
29.2	Bildbearbeitung	498
	Faltungsmatrizen	499

29.3	Entspannungsübungen	501
29.4	Lösungen	501
30	Mehrdimensionale Analysis	504
30.1	Abbildungen in mehr als einer Dimension	505
	Vektoren und ihre Schreibweisen	505
	Mehrdimensionale Funktionen	506
	Mehrdimensionale Funktionen mit GeoGebra	507
30.2	Differentialrechnung in $\mathbb{R}^n$	508
	Partielle Ableitungen	509
	Der Gradient	510
	Die Jacobimatrix	511
	Jacobimatrix und Koordinatentransformation	513
30.3	Entspannungsübungen	515
30.4	Lösungen	515
31	Numerische Verfahren	518
31.1	Intervallschachtelung	519
	Fortgesetzte Bisektion	519
	Kontinuierlicher Fall	520
31.2	Interpolation	522
	Polynominterpolation	522
	Lagrangesche Interpolationsformel	524
31.3	Ausgleichsrechnung	526
	Methode der kleinsten Quadrate	526
	Beispiel: Erdbeschleunigung mit dem Handy messen	526
31.4	Numerische Integration	528
	Trapezregel	529
	Adaptive Integration mit Sage	530
31.5	Entspannungsübungen	532
31.6	Lösungen	533

32	Analytische Geometrie	536
32.1	Ein Universum voller Vektoren	537
	Eine Gerade	537
	Zwei Geraden	539
	Geraden analysieren mit GeoGebra	540
	Ebenen	543
	Normale	544
	Hessesche Normalenform	546
	Kugeln	548
32.2	Begegnungen im Nichts	550
	Gerade trifft Ebene	550
	Ebene trifft Ebene	553
	Projektion und Spiegel	554
	Der Kreis schließt sich	555
32.3	Entspannungsübungen	560
32.4	Lösungen	561
	Anhang	566
	Index	571