

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

17

Über dieses Buch	17
Konventionen in diesem Buch	17
Was Sie nicht lesen müssen	18
Törichte Annahmen über die Leser	18
Wie dieses Buch aufgebaut ist	19
Teil I: Was Sie alles brauchen – die Zutaten	19
Teil II: Was, bitteschön, sind Differenzialgleichungen?	19
Teil III: Differenzialgleichungen – rechnerisch gelöst	20
Teil IV: Die große weite Welt der Differenzialgleichungen	20
Teil V: Der Top-Ten-Teil	20
Symbole, die in diesem Buch verwendet werden	20
Wie es weitergeht	21

Teil I

Was Sie alles brauchen – die Zutaten

23

Kapitel 1

Elementare Funktionen – Elementares über Funktionen

25

Was ist überhaupt eine Funktion?	25
Polynome – anständige Funktionen	28
So sehen sie aus	29
Der Definitionsbereich:	33
Nullstellen von Polynomen – das Mitternachtskapitel	34
Das Ausklammern – die Faktorzerlegung	34
Verhalten von Polynomen für x gegen Unendlich	37
Gebrochen rationale Funktionen – komplizierte Zeitgenossen	38
Alles, was erlaubt ist, der Definitionsbereich	39
Linearfaktorzerlegung von Zähler und Nenner	40
Wenn der Zähler Null wird, aber nicht der Nenner	41
Wenn der Nenner Null wird, aber nicht der Zähler	42
Wenn Zähler und Nenner gleichzeitig Null werden	44
Exponential- und Logarithmusfunktionen – wie Feuer und Wasser	47
Die allgemeine Exponentialfunktion	48
Der Logarithmus	50
Die e -Funktion	51
Definitions- und Wertebereich der e -Funktion	52
Rechenbeispiele	55

Trigonometrische Funktionen – ein ewiges Auf und Ab	58
Grundlegendes über die Hauptdarsteller Sinus und Kosinus	58
Spezielle Funktionswerte	59
Die wichtigste Sinus-Kosinus-Formel der Welt	60
Betragsfunktionen – sie sehen in allem nur das Positive	61
Kreise und Ellipsen – jetzt geht's rund	63
Kreise – runder geht's nicht	63
Ellipsen – naja, bessere Eier halt	65

Kapitel 2**Strecken, spiegeln, schieben und schunkeln mit Funktionen****67**

Spieglein, Spieglein	68
Symmetrien	68
Rauf und runter	69
Rechts und links	69
Strecken und stauchen in y -Richtung	71
Strecken und Stauchen in x -Richtung	72
Alles zusammen	74
Funktionenschar – die Blumensträuße unter den Funktionen	77
Beispiele	78

Kapitel 3**Differenzieren – die wichtigste Tätigkeit in diesem Buch****81**

Was ist denn eine Ableitung?	81
Schreibweisen der ersten Ableitung	82
Schreibweise der höheren Ableitungen	83
Ableitungen der elementaren Funktionen	84
Ableitungsregeln	86
Summen- und Faktorregel	86
Produktregel	87
Quotientenregel	88
Kettenregel	89
Alles zusammen	95
Noch ein letztes Beispiel	96
Geometrische Bedeutung von $f'(x)$, $f''(x)$ und $f'''(x)$	97
$f(x)$ und $f'(x)$ – mal Hochgebirge, mal Sandstrand	97
$f''(x)$ – krumme Dinger	98
Ganz besondere Punkte	101
Hoch-, Tief- und Sattelpunkte	101
Wendepunkte	103

Kapitel 4**Integrieren – genauso wichtig wie das Differenzieren****107**

Unbestimmtes Integral	107
Schreibweise mit Schlangenzeichen	110
Bestimmtes Integral	111
Drei Methoden, mit denen Sie (fast) jedes Integral knacken	113
Integration durch Substitution	113
Substitution am bestimmten Integral	113
Substitution am unbestimmten Integral	114
Partielle Integration	115
Partielle Integration – die Vorgehensweise	116
Integralberechnung mittels Partialbruchzerlegung	118
Partialbruchzerlegung – die Vorgehensweise	119
Numerisches Integrieren – so macht's der Computer	124
Einfachste Näherung: Trapezregel	124
Zweiteinfachste Näherung: Keplersche Fassregel	126

Kapitel 5**Komplexe Zahlen? Ja! Komplexe Sache? Nein!****127**

Welche Zahlen gibt es?	127
Was sind komplexe Zahlen?	130
Die drei Darstellungen	133
Die kartesische Darstellung mit x und y	133
Die Polardarstellung mit r , φ , Sinus und Kosinus	133
Die exponentielle Darstellung mit r , φ und der e -Funktion	134
Umrechnung der Darstellungen	135
Umrechnung von (exponentiell beziehungsweise polar) in kartesisch	135
Umrechnung von kartesisch in (exponentiell bzw. polar)	135
Rechnen mit komplexen Zahlen	137
Die konjugiert komplexe Zahl	137
Das Addieren und Subtrahieren komplexer Zahlen	137
Das Multiplizieren komplexer Zahlen	138
Das Dividieren komplexer Zahlen	139
Das Potenzieren komplexer Zahlen mit reellen Potenzen	140
Die n Lösungen der Gleichung $z^n = w$	141
Die 2 Lösungen der Mitternachtsformel	142

Kapitel 6**Nicht nur Angeber sagen Vektoren statt Pfeile****145**

Was hat es mit diesen Pfeilen auf sich?	145
Vektoren addieren, subtrahieren und mit Zahlen multiplizieren	148
Addition von Vektoren	148
Subtraktion von Vektoren	150
Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	152

Grundlagen der Differentialgleichungen für Dummies

Der Betrag eines Vektors	153
Das Skalarprodukt und das Vektorprodukt	155
Das Skalarprodukt	155
Das Vektorprodukt	158
Kapitel 7	
Matrizen und nicht Matrizen	161
Grundlegendes zu den Matrizen	162
Besondere Matrizen	163
Rechnen mit Matrizen	165
Addieren und Subtrahieren von Matrizen	165
Multiplizieren von Matrizen	166
Transponieren von Matrizen	168
Determinante	169
Berechnung einer (2×2) -Determinante	170
Berechnung einer (3×3) -Determinante	170
Sarrus-Regel	170
Berechnung einer $(n \times n)$ -Determinante	173
Inverse Matrix	175
Lineare Gleichungssysteme	178
Kapitel 8	
Eigenwertprobleme sind keine Probleme	181
Was sind Eigenwertprobleme, wenn es keine Probleme sind?	181
Berechnung der Eigenwerte	182
Berechnung von Eigenvektoren	184
Berechnung reeller Eigenvektoren	184
Berechnung komplexer Eigenvektoren	186
Teil II	
Was, bitteschön, sind Differentialgleichungen?	189
Kapitel 9	
Was sind Differentialgleichungen?	191
Zusammenhang zwischen Ableitungen, Steigungen, Krümmungen, Zu- und Abnahmen, sowie Geschwindigkeit und Beschleunigung	191
Ort – Geschwindigkeit – Beschleunigung	194
Differentialgleichungen – Anfangswertprobleme – Randwertprobleme	200
Unterschied zwischen der allgemeinen Lösung und der Lösung eines Anfangswertproblems	202

Differenzialgleichungssysteme	204
Gekoppelte Differenzialgleichungen	204
Lineare Systeme – Matrizen	206
Kapitel 10	
Für jede Differenzialgleichung gibt es eine passende Schublade	209
Differenzialgleichungen klassifizieren	209
Gewöhnlich / partiell	210
Linearität	210
Homogenität	211
Ordnung	212
Beispiele	212
Differenzialgleichungssysteme klassifizieren	214
Kapitel 11	
Verschiedene Lösungsmethoden	217
Ratender Zugang – nicht nur für Glücksspieler	218
Grafischer Zugang – nicht nur für Grafikdesigner	219
Numerischer Zugang – nicht nur für Numeriker	220
Rechnerischer Zugang – nicht nur für Spatenmathematiker	221
Kapitel 12	
Grafischer Zugang zu Differenzialgleichungen erster Ordnung	223
Das Richtungsfeld zeigt, wo's lang geht	223
Erstes Beispiel zum Zeichnen, Staunen, Vermuten und Überprüfen	224
Einmal rückwärts: Von der allgemeinen Lösung zur Differenzialgleichung	226
Zweites Beispiel zum Zeichnen, Staunen, Vermuten und Überprüfen	228
Drittes Beispiel zum Zeichnen, Staunen, Vermuten und Überprüfen	231
Teil III	
Differenzialgleichungen – rechnerisch gelöst	233
Kapitel 13	
Differenzialgleichungen erster Ordnung (homogen und inhomogen)	235
Lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung	237
Trennung der Variablen für homogene Differenzialgleichungen	
erster Ordnung	238
Variation der Konstanten	241
Berechnung der allgemeinen Lösung der linearen Differenzialgleichung	
erster Ordnung $y'(x) + g(x) \cdot y(x) = r(x)$	247
Nichtlineare Differenzialgleichungen erster Ordnung	250
Lösen mittels TdV	251

Kapitel 14**Anfangswertprobleme in Handarbeit und mit
Herrn Eulers Verfahren lösen****255**

Anfangswertprobleme sind auch keine Probleme	255
Erstes Beispiel eines Anfangswertproblems	257
Zweites Beispiel eines Anfangswertproblems	258
Das Eulerverfahren – unglaublich, schon wieder Herr Euler!	259
Anschauliche Beschreibung der Methode	259
Die Methode in Formeln	259
Beispiel für eine Anwendung des Eulerverfahrens	262
Wettkampf: Hand gegen Rechner	262
Die exakte Lösung von Hand	263
Die Näherungslösung vom Rechner	264
Der Vergleich	265

Kapitel 15**Lineare Differenzialgleichungen höherer Ordnung mit
konstanten Koeffizienten****267**

Grundlegendes und Wissenswertes	268
Stufe 1: Die allgemeine Lösung der homogenen Differenzialgleichung	269
Charakteristisches Polynom	271
Stufe 2: Die partikuläre Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung	278
Ansatz für $y_p(x)$	279
Bestimmung der Konstanten aus dem Ansatz	284
Beispiele – Beispiele – Beispiele	286
Erstes Beispiel	286
Abschließendes Beispiel der übleren Sorte	289

Kapitel 16**Differenzialgleichungssysteme****293**

Die Metamorphose: Verwandlung einer Differenzialgleichung in ein Differenzialgleichungssystem	293
Beispiel 1 für die sagenhafte Umwandlung	294
Beispiel 2 für die sagenhafte Umwandlung	295
Lösen von linearen homogenen Differenzialgleichungssystemen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten	296
Mit dem richtigen Ansatz zum Ziel finden	297
Beispiel zu reellen und verschiedenen Eigenwerten	299
Beispiel zu reellen und teilweise gleichen Eigenwerten	301
Beispiel zu teilweise konjugiert komplexen Eigenwerten	303

Kapitel 17**Anfangswertprobleme von Differenzialgleichungssystemen von Hand,
mit Herrn Euler und mit MATLAB gelöst**

307

Anfangswertprobleme von Hand gelöst	308
Anfangswertprobleme mit Herrn Eulers Verfahren gelöst	311
Anschauliche Beschreibung der Methode	311
Die Methode in Formeln	312
Beispiel für eine Anwendung des Eulerverfahrens	313
Anfangswertprobleme mit MATLAB gelöst.	315

Teil IV**Die große weite Welt der Differenzialgleichungen**

319

Kapitel 18**Anwendungen aus der Physik**

321

Der radioaktive Zerfall	321
Herleitung der Differenzialgleichung	322
Lösen der linearen Differenzialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten	322
Das Federpendel	324
Herleitung der homogenen linearen Differenzialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	324
Lösen der homogenen Differenzialgleichung	325
Lösen einer inhomogenen Differenzialgleichung	326
Der elektrische Schwingkreis	329
Herleitung einer inhomogenen Differenzialgleichung	329

Kapitel 19**Anwendungen aus Biologie, Chemie, Ökonomie und Alltag**

333

Biologie: Räuber-Beute-Modell	334
Und so hilft MATLAB beim Lösen	334
Chemie: Reaktionen 2. Ordnung $A + B \rightarrow D + E$	338
So kommt die Differenzialgleichung zustande	339
Und so lösen Sie sie	340
Ökonomie: Das Wechselspiel zwischen Zinsen und Konjunktur	344
So kommt das Differenzialgleichungssystem zustande	344
Und so lösen Sie es	345
Alltag: Verbreitung von Gerüchten	349
So kommt die Differenzialgleichung zustande	349
Und so lösen Sie sie	350
Differenzialgleichungen selbst gemacht	353

Teil V

Der Top-Ten-Teil

357

Kapitel 20

Zehn Dinge, die Sie über Differenzialgleichungen wissen MÜSSEN

359

Nahe Verwandte	359
Die Erbanlage	359
Tage der Vernunft	359
Eulers Großeltern	359
Ein besonderer Acker	359
Typisch Mathematiker	360
Persönlichkeitsstörung	360
Exotische Vögel	360
Aufgaben der Bäume	360
Unerwartete Gemeinsamkeiten	360

Stichwortverzeichnis

361