

Inhaltsverzeichnis

Warum hilft dir dieses Buch?	v
Grundlagen und Rechnen	1
Was sind natürliche Zahlen?	2
Wie funktioniert Addition?	3
Wie funktioniert Subtraktion?	4
Übersicht: Addition und Subtraktion	5
Wie funktioniert Multiplikation?	6
In welcher Reihenfolge addierst und multiplizierst du?	7
Wie rechnest du mit Klammern?	8
Wann kannst du eine Klammer einfach weglassen?	9
Wie hilft dir das Distributivgesetz, Klammern loszuwerden? . .	10
Warum ist Minus mal Minus gleich Plus?	11
Übersicht: Verbindung von Addition und Multiplikation	12
Wozu brauchst du die Division?	13
Warum kannst du nicht durch Null dividieren?	14
Wozu brauchst du Brüche (rationale Zahlen)?	15
Wie erweiterst und kürzt du Brüche?	16
Wie addierst und subtrahierst du Brüche?	17
Wie bringst du Brüche auf den gleichen Nenner?	18
Wie multiplizierst und dividierst du Brüche?	19
Übersicht: Multiplikation und Division	20
Übersicht: Bruchrechnung	21
Was sind Dezimalzahlen?	22
Warum reichen die Bruchzahlen nicht?	23
Was sind Unbekannte und Variablen?	24
Wie multiplizierst du aus und wie klammerst du aus?	25
Wie kannst du Gleichungen umformen?	26
Potenzen, Wurzeln, Logarithmen	27
Wozu brauchst du Potenzen?	28
Was bedeuten negative Exponenten?	29
	ix

Wie quadriert man Klammern?	30
Wozu brauchst du die Wurzel und wie rechnest du damit? . .	31
Was ist der Betrag einer Zahl?	32
Wozu brauchst du Logarithmen?	33
Was ist ein Logarithmus zu einer anderen Basis als 10?	34
Was bedeutet es, dass man Logarithmus als log schreibt? . . .	35
Wie rechnest du mit Logarithmen?	36
Warum gibt es bei Potenzen zwei Umkehrungen?	37
Übersicht: Potenzen, Wurzeln, Logarithmen	38
Etwas Aussagenlogik und Mengenlehre	39
Wie rechnest du mit „wahr“ und „falsch“?	40
Was bedeutet „aus A folgt B“?	41
Was bedeutet „notwendig“ und „hinreichend“?	42
Was bedeutet „genau dann, wenn“?	43
Was ist eine Menge?	44
Wie rechnet man mit Mengen?	45
Was sind Intervalle?	46
Welche Beweisarten gibt es?	47
Auflösen von Gleichungen nach Unbekannten	49
Wie formst du Gleichungen mit Äquivalenzumformungen um?	50
Was sind typische Äquivalenzumformungen?	51
Wo musst du beim Gleichungsumformen aufpassen?	52
Wie erkennst du den Typ einer Gleichung?	53
Wie löst du eine lineare Gleichung?	54
Wie löst du eine quadratische Gleichung?	55
Wie geht die quadratische Ergänzung allgemein?	56
Wie löst du Gleichungen höheren Grades?	57
Wie löst du Exponentialgleichungen?	58
Wie bestimmst du die Lösungsmenge einer Betragsgleichung?	59
Wie bestimmst du die Lösungsmenge einer Ungleichung? . . .	60
Wie löst du ein lineares Gleichungssystem?	61
Etwas Geometrie	63
Warum ist die Winkelsumme im Dreieck 180° ?	64
Was sind ähnliche Dreiecke?	65
Wo hilft dir der Satz des Pythagoras?	66
Wodurch ist die Form eines rechtwinkligen Dreiecks bestimmt?	67

Wie berechnest du die Längen eines rechtwinkligen Dreiecks?	68
Wie ist der Sinus definiert und wie berechnest du ihn?	69
Wie berechnest du $\sin(30^\circ)$ und $\sin(60^\circ)$?	70
Was sind Kosinus und Tangens?	71
Wo findest du Sinus und Kosinus am Einheitskreis?	72
Wo helfen dir der Kosinussatz und der Sinussatz?	73
Was hat Fläche mit Multiplizieren zu tun?	74
Wie kannst du dir die binomischen Formeln mit Flächen merken?	75
Wie berechnest du ein Volumen?	76
Was haben Potenzen mit Dimensionen zu tun?	77
Was ist π und wozu brauchst du diese Zahl?	78
Was ist Radiant und wieso ist diese Einheit praktisch?	79
Wie berechnest du die Fläche eines Kreises?	80
Wozu brauchst du ein Koordinatensystem?	81

Lösen von Sach- und Anwendungsaufgaben 83

Was hat Mathematik mit der Wirklichkeit zu tun?	84
Wie löst du Sachaufgaben?	85
Wie übersetzt du ein Problem in die Mathematik?	86
Wie löst du das Problem in der Mathematik?	87
Wie übersetzt du die Lösung zurück in die Realität?	88
Wofür hilft der Dreisatz?	89
Wie geht Prozent- und Zinsrechnung?	90
Wie geht Zinseszinsrechnung?	91
Wieso sind Einheiten wichtig?	92
Wie kannst du mit Einheiten Formeln überprüfen?	93

Funktionen 95

Was ist eine Funktion?	96
Wie kannst du eine Funktion darstellen?	97
Was bedeutet injektiv und surjektiv?	98
Was bedeutet bijektiv?	99
Wie kommst du von einer linearen Funktion zur Geraden? . . .	100
Was ist die Steigung einer Geraden und das Steigungsdreieck?	101
Wie kommst du noch von einer linearen Funktion zur Geraden?	102
Wie kommst du von einer Geraden zu ihrer Gleichung?	103
Wie stellst du die Achsenabschnittsform einer Geraden auf? .	104
Wie lautet die Gleichung der Normalparabel?	105

Wie kommst du von einer quadratischen Funktion zur Parabel?	106
Wie stellst du fest, ob eine Funktion symmetrisch ist?	107
Wie verschiebst du Funktionen?	108
Wie streckst du Funktionen in y-Richtung?	109
Wie streckst du Funktionen in x-Richtung?	110
Wie spiegelst du Funktionen an der Winkelhalbierenden? . . .	111
Wann stehen zwei Geraden aufeinander senkrecht?	112
Wie sehen Potenzfunktionen aus?	113
Was ist ein Polynom?	114
Wie findest du Nullstellen von Polynomen?	115
Was sind mehrfache Nullstellen?	116
Was sind gebrochenrationale Funktionen?	117
Wie geht Polynomdivision?	118
Wie geht Polynomdivision mit Rest?	119
Wie sehen Exponentialfunktionen aus?	120
Wie sehen Logarithmusfunktionen aus?	121
Übersicht: Injektiv, surjektiv und bijektiv	122
Folgen und Grenzwerte	123
Wozu benutzt man Indizes?	124
Wie rechnet man mit einem Summenzeichen?	125
Wie geht die binomische Formel für höhere Potenzen?	126
Was ist eine Folge?	127
Wie beweist du eine Aussage für alle natürlichen Zahlen? . . .	128
Was bedeutet es, dass eine Folge gegen null konvergiert? . . .	129
Wie prüfst du, dass eine Folge gegen null konvergiert?	130
Was bedeutet es, dass eine Folge konvergiert?	131
Was bedeutet es, dass eine Folge divergiert?	132
Wie stellst du fest, ob eine Folge konvergiert?	133
Warum konvergieren monotone und beschränkte Folgen? . .	134
Was ist eine Reihe und wann konvergiert sie?	135
Wie bestimmst du den Wert einer geometrischen Reihe? . . .	136
Wie kannst du die Konvergenz einer Reihe bestimmen?	137
Was sind Grenzwerte von Funktionen?	138
Wie berechnest du einfache Grenzwerte?	139
Was bedeutet es anschaulich, dass eine Funktion stetig ist? . .	140
Was bedeutet es mathematisch, wenn eine Funktion stetig ist?	141
Was bedeutet es, wenn eine Funktion stetig fortsetzbar ist? .	142

Wie stellst du fest, ob eine Funktion stetig ist?	143
Wie prüfst du eine stückweise definierte Funktion auf Stetigkeit?	144

Differenzialrechnung145

Wie bestimmst du die Steigung einer Tangente?	146
Was bedeutet die Ableitung?	147
Wann ist eine Funktion differenzierbar?	148
Wie leitest du Potenzfunktionen ab?	149
Wie leitest du zusammengesetzte Funktionen ab?	150
Wie groß ist die Steigung der Exponentialfunktion bei $x = 0$? .	151
Was ist an der Exponentialfunktion mit $f'(0) = 1$ besonders? .	152
Wie kann man die e-Funktion noch schreiben?	153
Inwiefern ist die Ableitung eine Linearisierung?	154
Wie nutzt du, dass die Ableitung die Linearisierung ist?	155
Wie leitest du ein Produkt ab?	156
Wie leitest du einen Quotienten ab?	157
Was ist eine verkettete Funktion?	158
Wie bestimmst du die Ableitung einer verketteten Funktion? .	159
Wie leitest du Exponentialfunktionen ab?	160
Wie bestimmst du die Ableitung der Umkehrfunktion?	161
Wie bestimmst du konkret die Ableitung der Umkehrfunktion?	162
Übersicht: Funktionen und ihre Ableitungen	163
Wie bestimmst du Kandidaten für Minima und Maxima?	164
Wie bestimmst du, ob ein Minimum oder Maximum vorliegt? .	165
Was sagt die zweite Ableitung aus?	166
Was sind Wendepunkte und wie bestimmst du sie?	167
Warum ist $(a_1 a_2 \dots a_n)^{1/n} \leq (a_1 + a_2 + \dots a_n)/n$? (I)	168
Warum ist $(a_1 a_2 \dots a_n)^{1/n} \leq (a_1 + a_2 + \dots a_n)/n$? (II)	169
Übersicht: Bestimmung von Extremwerten und Wendepunkten	170
Übersicht: Wie hängen die Graphen von f und f' zusammen? .	171
Wie löst du Extremwertaufgaben ?(I)	172
Wie löst du Extremwertaufgaben ? (II)	173
Wie machst du eine Kurvendiskussion?	174
Übersicht: Kurvendiskussion	175

Integralrechnung177

Wie kannst du Flächen mit unendlichen Summen berechnen? .	178
Was ist ein bestimmtes Integral?	179

Was ist ein unbestimmtes Integral?	180
Was ist eine Stammfunktion?	181
Was sagt der Hauptsatz aus?	182
Warum gilt der Hauptsatz?	183
Wie berechnest du Stammfunktionen?	184
Wie kannst du Flächen mit Stammfunktionen berechnen? . . .	185
Wie bestimmst du Integrale mit partieller Integration? (I) . . .	186
Wie bestimmst du Integrale mit partieller Integration? (II) . .	187
Wie bestimmst du Integrale mit Substitution? (I)	188
Wie bestimmst du Integrale mit Substitution? (II)	189
Wie berechnest du die Fläche eines Kreises?	190
Wann ist eine Funktion integrierbar?	191
Wann ist eine Funktion uneigentlich integrierbar?	192
Übersicht: Funktionen und ihre Stammfunktionen	193
Vektorrechnung und elementare analytische Geometrie	195
Was ist lineare Algebra und analytische Geometrie?	196
Was ist ein Vektor anschaulich? (I)	197
Was ist ein Vektor anschaulich? (II)	198
Wie multiplizierst du Vektoren mit einer reellen Zahl?	199
Wie addierst und subtrahierst du Vektoren?	200
Was ist eine Linearkombination von Vektoren?	201
Wann ist eine Menge Vektoren linear abhängig?	202
Wann ist eine Menge Vektoren linear unabhängig?	203
Was ist das Skalarprodukt?	204
Wie bestimmst du den Winkel zwischen zwei Vektoren?	205
Was hat das Skalarprodukt mit Projektion zu tun?	206
Wie kannst du eine Gerade in der Parameterform darstellen? .	207
Wie kannst du eine Ebene in der Parameterform darstellen? .	208
Wie kannst du eine Gerade in der HNF darstellen? (I)	209
Wie kannst du eine Gerade in der HNF darstellen? (II)	210
Wie kannst du eine Ebene in der HNF darstellen?	211
Wie kannst du Geraden-Gleichungen ineinander umrechnen? (I)	212
Wie kannst du Geraden-Gleichungen ineinander umrechnen? (II)	213
Übersicht: Parametrische und implizite Gleichungen	214
Vektoren, Matrizen und lineare Gleichungssysteme	215
Was ist ein (abstrakter) Vektorraum?	216

Was sind Basis und Dimension eines Vektorraums?	217
Was ist eine lineare Abbildung?	218
Wozu brauchst du Matrizen?	219
Wie addierst du Matrizen und multiplizierst sie mit einem Skalar?	220
Wie multiplizierst du Matrizen?	221
Wie multiplizierst du Matrizen konkret?	222
Was sind wichtige Spezialfälle der Matrixmultiplikation? . . .	223
Was ist die inverse Matrix?	224
Was gilt für die Matrixmultiplikation?	225
Was ist eine Determinante?	226
Wie kannst du 2×2 -Determinanten verstehen?	227
Welche Eigenschaften hat eine Determinante?	228
Wie kannst du 3×3 -Determinanten verstehen?	229
Wie kannst du eine 3×3 -Determinante berechnen?	230
Wie kannst du mit Determinanten Flächen berechnen?	231
Was ist das Vektorprodukt? (I)	232
Was ist das Vektorprodukt? (II)	233
Was sind Kern und Bild einer linearen Abbildung?	234
Was bedeutet der Rang einer Matrix?	235
Was sagt der Dimensionssatz?	236
Was sagt der Dimensionssatz bei Endomorphismen?	237
Wie berechnest du die Lösung eines 3×3 -LGS? (I)	238
Wie berechnest du die Lösung eines 3×3 -LGS? (II)	239
Wie berechnest du die Lösung eines 3×3 -LGS? (III)	240
Wie stellst du ein LGS als Matrix dar?	241
Welche Struktur hat die Lösungsmenge eines LGS?	242
Wie berechnest du die Inverse einer 3×3 -Matrix?	243
Wie kannst du ein LGS immer in Zeilen-Stufen-Form bringen? .	244
Was sagt der Rang über die Lösungsmenge eines LGS?	245
Was sagt der Dimensionssatz konkret für $Ax = 0$ und $x \in \mathbb{R}^3$?	246
Wie berechnest du den Schnittpunkt zweier Geraden?	247
Wie berechnest du Schnittpunkte von Geraden und Ebenen? .	248
Wie berechnest du Schnittgeraden?	249
Wie berechnest du Abstand Punkt-Gerade und Punkt-Ebene .	250
Wie berechnest du Abstand Punkt-Gerade im 3-Dimensionalen	251
Wie berechnest du Abstand Gerade-Gerade und Gerade-Ebene?	252
Übersicht: Gegenseitige Lage von Punkten, Geraden und Ebenen	253
Übersicht: Produkte von Vektoren in verschiedenen Notationen	254

Etwas Wahrscheinlichkeitsrechnung	255
Was sind Ereignisse und wie kannst du mit ihnen rechnen? . . .	256
Was ist Wahrscheinlichkeit?	257
Was bedeutet bedingte Wahrscheinlichkeit?	258
Wie kannst du eine Wahrscheinlichkeit berechnen?	259
Was ist eine Zufallsvariable und ihre Verteilung?	260
Welches sind Beispiele diskreter Zufallsvariablen?	261
Wie addierst du Zufallsvariablen?	262
Was ist der Erwartungswert einer Zufallsvariablen?	263
Was ist die Varianz einer Zufallsvariablen?	264
Wie berechnen sich Erwartungswert und Varianz von \bar{X} ? . . .	265
Wofür brauchst du die Binomialverteilung?	266
Wie sieht die Binomialverteilung aus?	267
Was ist eine kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung? . .	268
Was ist die Gauß'sche Normalverteilung?	269
Wie kannst du die Gauß'sche Normalverteilung verstehen? (I)	270
Wie kannst du die Gauß'sche Normalverteilung verstehen? (II)	271
 Wie geht's weiter? – Ausblick	 273
Sind alle unendlichen Mengen gleich groß?	274
Wofür sind Quantoren nützlich?	275
Was ist Algebra?	276
Wozu braucht man komplexe Zahlen?	277
Wie rechnest du mit komplexen Zahlen?	278
Wie kannst du komplexe Zahlen in der Ebene darstellen? . . .	279
Wie kannst du komplexe Zahlen multiplizieren?	280
Warum sind die komplexen Zahlen so wichtig?	281
Wie kannst du Funktionen durch eine Reihe darstellen?	282
Wie berechnest du Taylorreihen konkret?	283
Wie hängt die Taylorreihe mit der e-Funktion zusammen? . . .	284
Wie hängt e^{ix} mit $\sin(x)$ und $\cos(x)$ zusammen?	285
Wie kannst du $e^{i\pi} + 1 = 0$ geometrisch verstehen?	286
Was ist eine Differenzialgleichung?	287
Was versteht man unter Konfigurationsräumen? (I)	288
Was versteht man unter Konfigurationsräumen? (II)	289
Was ist geometrische Algebra?	290
Was ist das geometrische Produkt?	291
Was bedeutet das äußere Produkt?	292

Wie berechnet man das geometrische Produkt konkret? . . . 293

Wie kannst du spielerisch dein Können überprüfen? 294

Übersicht der Übersichten 295

Wenn du Begriffe oder Symbole suchst, schau hier! 297