

Inhaltsverzeichnis

I Lineare Algebra	1
1 Vektoren	1
2 Reelle Matrizen	5
2.1 Ein einführendes Beispiel	5
2.2 Definition einer reellen Matrix	6
2.3 Transponierte einer Matrix	10
2.4 Spezielle quadratische Matrizen	11
2.4.1 Diagonalmatrix	11
2.4.2 Einheitsmatrix	12
2.4.3 Dreiecksmatrix	12
2.4.4 Symmetrische Matrix	13
2.4.5 Schiefsymmetrische Matrix	14
2.5 Gleichheit von Matrizen	15
2.6 Rechenoperationen für Matrizen	15
2.6.1 Addition und Subtraktion von Matrizen	16
2.6.2 Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar	17
2.6.3 Multiplikation von Matrizen	18
3 Determinanten	23
3.1 Ein einführendes Beispiel	23
3.2 Zweireihige Determinanten	25
3.2.1 Definition einer zweireihigen Determinante	25
3.2.2 Eigenschaften zweireihiger Determinanten	26
3.3 Dreireihige Determinanten	33
3.3.1 Definition einer dreireihigen Determinante	33
3.3.2 Entwicklung einer dreireihigen Determinante nach Unterdeterminanten (Laplacescher Entwicklungssatz)	37
3.4 Determinanten höherer Ordnung	41
3.4.1 Definition einer n -reihigen Determinante	41
3.4.2 Laplacescher Entwicklungssatz	45
3.4.3 Rechenregeln für n -reihige Determinanten	47
3.4.4 Regeln zur praktischen Berechnung einer n -reihigen Determinante	50
4 Ergänzungen	54
4.1 Reguläre Matrix	54
4.2 Inverse Matrix	55
4.3 Orthogonale Matrix	58
4.4 Rang einer Matrix	63

5	Lineare Gleichungssysteme	69
5.1	Allgemeine Vorbetrachtungen	69
5.2	Gaußscher Algorithmus	72
5.3	Lösungsverhalten eines linearen (m, n) -Gleichungssystems	76
5.4	Lösungsverhalten eines quadratischen linearen Gleichungssystems	83
5.4.1	Inhomogenes lineares (n, n) -System	83
5.4.2	Homogenes lineares (n, n) -System	87
5.4.3	Cramersche Regel	90
5.5	Berechnung einer inversen Matrix nach dem Gaußschen Algorithmus (Gauß-Jordan-Verfahren)	93
5.6	Lineare Unabhängigkeit von Vektoren	95
5.6.1	Ein einführendes Beispiel	95
5.6.2	Linear unabhängige bzw. linear abhängige Vektoren	97
5.6.3	Kriterien für die lineare Unabhängigkeit von Vektoren	99
5.7	Ein Anwendungsbeispiel: Berechnung eines elektrischen Netzwerkes	104
6	Komplexe Matrizen	105
6.1	Ein einführendes Beispiel	106
6.2	Definition einer komplexen Matrix	107
6.3	Rechenoperationen und Rechenregeln für komplexe Matrizen	108
6.4	Konjugiert komplexe Matrix, konjugiert transponierte Matrix	110
6.5	Spezielle komplexe Matrizen	113
6.5.1	Hermiteische Matrix	113
6.5.2	Schiefhermitesche Matrix	116
6.5.3	Unitäre Matrix	118
7	Eigenwerte und Eigenvektoren einer quadratischen Matrix	120
7.1	Ein einführendes Beispiel	120
7.2	Eigenwerte und Eigenvektoren einer 2-reihigen Matrix	125
7.3	Eigenwerte und Eigenvektoren einer n -reihigen Matrix	132
7.4	Eigenwerte und Eigenvektoren spezieller Matrizen	138
7.4.1	Eigenwerte und Eigenvektoren einer Diagonal- bzw. Dreiecksmatrix	138
7.4.2	Eigenwerte und Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix	140
7.4.3	Eigenwerte und Eigenvektoren einer hermiteschen Matrix	142
7.5	Ein Anwendungsbeispiel: Normalschwingungen gekoppelter mechanischer Systeme	144
	Übungsaufgaben	146
	Zu Abschnitt 1	146
	Zu Abschnitt 2	147
	Zu Abschnitt 3	148
	Zu Abschnitt 4	151
	Zu Abschnitt 5	154
	Zu Abschnitt 6	158
	Zu Abschnitt 7	160

II Fourier-Reihen	163
1 Fourier-Reihe einer periodischen Funktion	163
1.1 Einleitung	163
1.2 Entwicklung einer periodischen Funktion in eine Fourier-Reihe	165
1.3 Komplexe Darstellung der Fourier-Reihe	174
1.4 Übergang von der komplexen zur reellen Darstellungsform	178
2 Anwendungen	182
2.1 Fourier-Zerlegung einer Schwingung (harmonische Analyse)	182
2.2 Zusammenstellung wichtiger Fourier-Reihen (Tabelle)	186
2.3 Ein Anwendungsbeispiel: Fourier-Zerlegung einer Kippspannung	187
Übungsaufgaben	190
Zu Abschnitt 1	190
Zu Abschnitt 2	192
 III Differential- und Integralrechnung für Funktionen von mehreren Variablen	194
1 Funktionen von mehreren Variablen	194
1.1 Definition einer Funktion von mehreren Variablen	194
1.2 Darstellungsformen einer Funktion	197
1.2.1 Analytische Darstellung	197
1.2.2 Darstellung durch eine Funktionstabelle (Funktionstafel)	198
1.2.3 Graphische Darstellung	200
1.2.3.1 Darstellung einer Funktion als Fläche im Raum	200
1.2.3.2 Schnittkurvendiagramme	204
1.3 Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion	209
2 Partielle Differentiation	213
2.1 Partielle Ableitungen 1. Ordnung	213
2.2 Partielle Ableitungen höherer Ordnung	222
2.3 Differentiation nach einem Parameter (verallgemeinerte Kettenregel)	227
2.4 Das totale oder vollständige Differential einer Funktion	232
2.4.1 Geometrische Betrachtungen	232
2.4.2 Definition des totalen oder vollständigen Differentials	234
2.5 Anwendungen	238
2.5.1 Implizite Differentiation	238
2.5.2 Linearisierung einer Funktion	242
2.5.3 Relative oder lokale Extremwerte	245
2.5.4 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen	252
2.5.5 Lineare Fehlerfortpflanzung	259

3 Mehrfachintegrale	266
3.1 Doppelintegrale	266
3.1.1 Definition und geometrische Deutung eines Doppelintegrals	266
3.1.2 Berechnung eines Doppelintegrals	269
3.1.2.1 Doppelintegral in kartesischen Koordinaten	269
3.1.2.2 Doppelintegral in Polarkoordinaten	277
3.1.3 Anwendungen	282
3.1.3.1 Flächeninhalt	283
3.1.3.2 Schwerpunkt einer homogenen Fläche	289
3.1.3.3 Flächenmomente (Flächenträgheitsmomente)	295
3.2 Dreifachintegrale	301
3.2.1 Definition eines Dreifachintegrals	301
3.2.2 Berechnung eines Dreifachintegrals	303
3.2.2.1 Dreifachintegral in kartesischen Koordinaten	303
3.2.2.2 Dreifachintegral in Zylinderkoordinaten	307
3.2.3 Anwendungen	312
3.2.3.1 Volumen und Masse eines Körpers	312
3.2.3.2 Schwerpunkt eines homogenen Körpers	320
3.2.3.3 Massenträgheitsmomente	326
Übungsaufgaben	332
Zu Abschnitt 1	332
Zu Abschnitt 2	332
Zu Abschnitt 3	338
 IV Gewöhnliche Differentialgleichungen	 343
1 Grundbegriffe	343
1.1 Ein einführendes Beispiel	343
1.2 Definition einer gewöhnlichen Differentialgleichung	345
1.3 Lösungen einer Differentialgleichung	345
1.4 Modellmäßige Beschreibung naturwissenschaftlich-technischer Problemstellungen durch Differentialgleichungen	348
1.5 Anfangswert- und Randwertprobleme	351
2 Differentialgleichungen 1. Ordnung	355
2.1 Geometrische Betrachtungen	355
2.2 Differentialgleichungen mit trennbaren Variablen	358
2.3 Integration einer Differentialgleichung durch Substitution	362
2.4 Exakte Differentialgleichungen	365
2.5 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung	370
2.5.1 Definition einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung	370
2.5.2 Integration der homogenen linearen Differentialgleichung	371
2.5.3 Integration der inhomogenen linearen Differentialgleichung	373
2.5.3.1 Variation der Konstanten	373
2.5.3.2 Aufsuchen einer partikulären Lösung	377

2.6	Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . .	380
2.7	Anwendungsbeispiele	384
2.7.1	Radioaktiver Zerfall	384
2.7.2	Freier Fall unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes	385
2.7.3	Wechselstromkreis	388
3	Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten ..	392
3.1	Definition einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	392
3.2	Allgemeine Eigenschaften der homogenen linearen Differentialgleichung ..	393
3.3	Integration der homogenen linearen Differentialgleichung	400
3.4	Integration der inhomogenen linearen Differentialgleichung	407
4	Anwendungen in der Schwingungslehre	417
4.1	Mechanische Schwingungen	417
4.1.1	Allgemeine Schwingungsgleichung der Mechanik	417
4.1.2	Freie ungedämpfte Schwingung	420
4.1.3	Freie gedämpfte Schwingung	424
4.1.3.1	Schwache Dämpfung (Schwingungsfall)	424
4.1.3.2	Starke Dämpfung (aperiodisches Verhalten, Kriechfall)	427
4.1.3.3	Aperiodischer Grenzfall	431
4.1.3.4	Zusammenfassung	434
4.1.4	Erzwungene Schwingung	435
4.2	Elektrische Schwingungen	445
4.2.1	Schwingungsgleichung eines elektrischen Reihenschwingkreises	445
4.2.2	Freie elektrische Schwingung	448
4.2.3	Erzwungene elektrische Schwingung	452
5	Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	456
5.1	Definition einer linearen Differentialgleichung n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	456
5.2	Integration der homogenen linearen Differentialgleichung	457
5.3	Integration der inhomogenen linearen Differentialgleichung	464
5.4	Ein Eigenwertproblem: Bestimmung der Eulerschen Knicklast	470
6	Numerische Integration einer Differentialgleichung	474
6.1	Numerische Integration einer Differentialgleichung 1. Ordnung	475
6.1.1	Streckenzugverfahren von Euler	475
6.1.2	Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung	479
6.2	Numerische Integration einer Differentialgleichung 2. Ordnung nach dem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung	485
7	Systeme linearer Differentialgleichungen	489
7.1	Systeme linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	489
7.1.1	Ein einführendes Beispiel	489
7.1.2	Grundbegriffe	490

7.1.3	Integration des homogenen linearen Differentialgleichungssystems . . .	493
7.1.4	Integration des inhomogenen linearen Differentialgleichungssystems ..	498
7.1.4.1	Aufsuchen einer partikulären Lösung	498
7.1.4.2	Einsetzungs- oder Eliminationsverfahren	504
7.1.5	Ein Anwendungsbeispiel: Kettenleiter	513
7.2	Systeme linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	517
Übungsaufgaben		523
Zu Abschnitt 1		523
Zu Abschnitt 2		524
Zu Abschnitt 3		530
Zu Abschnitt 4		532
Zu Abschnitt 5		535
Zu Abschnitt 6		539
Zu Abschnitt 7		540
 V Fourier-Transformationen		543
1 Grundbegriffe		543
1.1 Einleitung		543
1.2 Definition der Fourier-Transformierten einer Funktion		548
1.3 Inverse Fourier-Transformation		553
1.4 Äquivalente Fourier-Darstellung in reeller Form		555
 2 Spezielle Fourier-Transformationen		556
2.1 Fourier-Kosinus-Transformation		556
2.2 Fourier-Sinus-Transformation		558
2.3 Zusammenhang zwischen den Fourier-Transformationen $F(\omega)$, $F_c(\omega)$ und $F_s(\omega)$		560
 3 Wichtige „Hilfsfunktionen“ in den Anwendungen		562
3.1 Sprungfunktionen		562
3.2 Rechteckige Impulse		565
3.3 Diracsche Deltafunktion (Impulsfunktion)		566
3.4 Zusammenhang zwischen der Sprungfunktion und der Diracschen Deltafunktion		571
 4 Eigenschaften der Fourier-Transformation (Transformationssätze)		574
4.1 Linearitätssatz (Satz über Linearkombinationen)		574
4.2 Ähnlichkeitssatz		576
4.3 Verschiebungssatz (Zeitverschiebungssatz)		577
4.4 Dämpfungssatz (Frequenzverschiebungssatz)		580

4.5	Ableitungssätze (Differentiationssätze)	582
4.5.1	Ableitungssatz (Differentiationssatz) für die Originalfunktion	582
4.5.2	Ableitungssatz (Differentiationssatz) für die Bildfunktion	583
4.6	Integrationssatz für die Originalfunktion	586
4.7	Faltungssatz	587
4.8	Vertauschungssatz	591
4.9	Zusammenfassung der Rechenregeln (Transformationssätze)	594
4.10	Fourier-Transformation periodischer Funktionen (Sinus, Kosinus)	595
5	Rücktransformation aus dem Bildbereich in den Originalbereich	596
5.1	Allgemeine Hinweise zur Rücktransformation	596
5.2	Tabellen spezieller Fourier-Transformationen	599
	Tabelle 1: Exponentielle Fourier-Transformationen	599
	Tabelle 2: Fourier-Sinus-Transformationen	601
	Tabelle 3: Fourier-Kosinus-Transformationen	602
6	Anwendungen der Fourier-Transformation	603
6.1	Integration einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten	603
6.2	Beispiele aus Naturwissenschaft und Technik	605
6.2.1	Fourier-Analyse einer beidseitig gedämpften Kosinusschwingung (amplitudenmodulierte Kosinusschwingung)	605
6.2.2	Frequenzgang eines Übertragungssystems	607
6.2.3	Vierpol	610
	Übungsaufgaben	613
	Zu Abschnitt 1	613
	Zu Abschnitt 2	614
	Zu Abschnitt 3	615
	Zu Abschnitt 4	617
	Zu Abschnitt 5	621
	Zu Abschnitt 6	622
VI	Laplace-Transformationen	623
1	Grundbegriffe	623
1.1	Ein einführendes Beispiel	623
1.2	Definition der Laplace-Transformierten einer Funktion	626
1.3	Inverse Laplace-Transformation	631
2	Eigenschaften der Laplace-Transformation (Transformationssätze)	632
2.1	Linearitätssatz (Satz über Linearkombinationen)	633
2.2	Ähnlichkeitssatz	634
2.3	Verschiebungssätze	635
2.3.1	Erster Verschiebungssatz (Verschiebung nach rechts)	635
2.3.2	Zweiter Verschiebungssatz (Verschiebung nach links)	638

2.4 Dämpfungssatz	640
2.5 Ableitungssätze (Differentiationssätze)	641
2.5.1 Ableitungssatz (Differentiationssatz) für die Originalfunktion	641
2.5.2 Ableitungssatz (Differentiationssatz) für die Bildfunktion	644
2.6 Integrationssätze	646
2.6.1 Integrationssatz für die Originalfunktion	646
2.6.2 Integrationssatz für die Bildfunktion	648
2.7 Faltungssatz	649
2.8 Grenzwertsätze	652
2.9 Zusammenfassung der Rechenregeln (Transformationssätze)	656
3 Laplace-Transformierte einer periodischen Funktion	657
4 Rücktransformation aus dem Bildbereich in den Originalbereich	661
4.1 Allgemeine Hinweise zur Rücktransformation	661
4.2 Tabelle spezieller Laplace-Transformationen	664
5 Anwendungen der Laplace-Transformation	667
5.1 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	667
5.1.1 Allgemeines Lösungsverfahren mit Hilfe der Laplace-Transformation	667
5.1.2 Integration einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung mit	
konstanten Koeffizienten	668
5.1.3 Integration einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit	
konstanten Koeffizienten	670
5.2 Einfache Beispiele aus Physik und Technik	673
5.2.1 Entladung eines Kondensators über einen ohmschen Widerstand	673
5.2.2 Zeitverhalten eines PT_1 -Regelkreisgliedes	675
5.2.3 Harmonische Schwingung einer Blattfeder in einem beschleunigten	
System	676
5.2.4 Elektrischer Reihenschwingkreis	678
5.3 Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	681
Übungsaufgaben	686
Zu Abschnitt 1	686
Zu Abschnitt 2	687
Zu Abschnitt 3	690
Zu Abschnitt 4	691
Zu Abschnitt 5	692

Anhang: Lösungen der Übungsaufgaben	695
I Lineare Algebra	695
Abschnitt 1	695
Abschnitt 2	695
Abschnitt 3	697
Abschnitt 4	699
Abschnitt 5	703
Abschnitt 6	710
Abschnitt 7	713
II Fourier-Reihen	722
Abschnitt 1	722
Abschnitt 2	724
III Differential- und Integralrechnung für Funktionen von mehreren Variablen	729
Abschnitt 1	729
Abschnitt 2	730
Abschnitt 3	739
IV Gewöhnliche Differentialgleichungen	752
Abschnitt 1	752
Abschnitt 2	752
Abschnitt 3	761
Abschnitt 4	766
Abschnitt 5	772
Abschnitt 6	777
Abschnitt 7	778
V Fourier-Transformationen	784
Abschnitt 1	784
Abschnitt 2	786
Abschnitt 3	790
Abschnitt 4	792
Abschnitt 5	797
Abschnitt 6	798
VI Laplace-Transformationen	801
Abschnitt 1	801
Abschnitt 2	802
Abschnitt 3	807
Abschnitt 4	808
Abschnitt 5	809
Literaturhinweise	819
Sachwortverzeichnis	820