
Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Konzepte der numerischen Mathematik	3
1.1.1	Approximation	3
1.1.2	Konvergenz	4
1.1.3	Fehler	5
1.1.4	Fehlerabschätzung	5
1.1.5	Konvergenzgeschwindigkeit	7
1.1.6	Effizienz	7
1.1.7	Stabilität	9
1.2	Definition eines Algorithmus	11
1.2.1	Numerischer Aufwand und Landau-Symbole	15
1.3	Fehler, Fehlerverstärkung und Konditionierung	17
1.3.1	Konditionierung der Grundoperationen	22
1.4	Zahldarstellung und deren Bedeutung in der Numerik	23
1.4.1	Zahldarstellungen	23
1.4.2	Maschinengenauigkeit	29
1.4.3	Rechengeschwindigkeit – Floating point operations per second	31
1.5	Rundungsfehleranalyse und Stabilität von numerischen Algorithmen	32
1.6	Exkurs: Die Steuerfunktion in der Einkommensteuerberechnung	35
 Teil I Numerische Methoden der linearen Algebra		
2	Grundlagen der linearen Algebra	41
3	Lineare Gleichungssysteme	51
3.1	Störungstheorie und Stabilitätsanalyse von linearen Gleichungssystemen	52
3.2	Das Gaußsche Eliminationsverfahren und die LR-Zerlegung	56
3.2.1	LR-Zerlegung mit Pivotisierung	64
		IX

3.2.2	LR-Zerlegung für diagonaldominante Matrizen	72
3.3	Die Cholesky-Zerlegung für symmetrisch positiv definite Matrizen	74
3.4	Dünn besetzte Matrizen und Bandmatrizen	77
3.4.1	Dünn besetzte Matrizen in der Praxis	80
3.4.2	Der Cuthill-McKee-Sortieralgorithmus	81
3.5	Exkurs: LR-Zerlegung auf Parallelrechnern	87
3.5.1	Konzepte des parallelen Rechnens	88
3.5.2	Parallele LR-Zerlegung	94
3.6	Nachiteration	99
3.7	Fixpunktverfahren zum Lösen linearer Gleichungssysteme	102
3.7.1	Konvergenzkriterium für Jacobi- und Gauß-Seidel-Iteration.	108
3.7.2	Relaxationsverfahren: das SOR-Verfahren	113
3.7.3	Praktische Aspekte	117
3.8	Exkurs: Numerische Approximation des Minimalflächenproblems	121
3.8.1	Modellierung	121
3.8.2	Diskretisierung	127
3.8.3	Beispiele	134
4	Orthogonalisierungsverfahren und die QR-Zerlegung	139
4.1	Die QR-Zerlegung	140
4.2	Das Gram-Schmidt-Verfahren	143
4.3	Householder-Transformationen	151
4.4	Givens-Rotationen	158
4.5	Überbestimmte Gleichungssysteme	162
4.6	Exkurs: Astronomische Hauptachsenbestimmung eines Himmelskörpers	170
5	Das Eigenwertproblem	173
5.1	Konditionierung der Eigenwertaufgabe	174
5.2	Direkte Methode	178
5.3	Iterative Verfahren	179
5.4	Zerlegungsverfahren zur Eigenwertbestimmung	187
5.4.1	Cholesky-Verfahren	189
5.4.2	QR-Verfahren	194
5.5	Reduktionsmethoden	199
5.6	Exkurs: Eigenschwingungen eines Mehrfach-Federpendels	206
5.6.1	Mathematische Modellierung	206
5.6.2	Numerische Approximation der Differentialgleichung	213
5.7	Singulärwertzerlegung	220
5.7.1	Approximation der Singulärwertzerlegung	224
5.7.2	Anwendungen der Singulärwertzerlegung	229
5.8	Exkurs: Singulärwertzerlegung zur Bildkompression	236

6	Krylowraumverfahren für lineare Gleichungssysteme und das Eigenwertproblem.	239
6.1	Galerkin-Gleichung und Krylow-Teilräume	240
6.2	Das CG-Verfahren für symmetrisch positiv definite Gleichungssysteme	242
6.3	Vorkonditioniertes CG-Verfahren	248
6.4	Das Arnoldi-Verfahren	252
6.4.1	Das Eigenwertproblem.	255
6.5	Das GMRES-Verfahren	257
6.5.1	Praktische Aspekte und Implementierung	260
6.5.2	Vorkonditioniertes GMRES-Verfahren	269

Teil II Numerische Methoden der Analysis

7	Grundlagen der Analysis	273
8	Nullstellenbestimmung	283
8.1	Stabilität und Kondition	284
8.2	Intervallschachtelung	291
8.3	Das Newton-Verfahren.	294
8.3.1	Varianten des Newton-Verfahrens	301
8.3.2	Konvergenzbegriffe	313
8.4	Nullstellensuche im $\mathbb{R}^n$.	316
8.4.1	Newton-Verfahren im $\mathbb{R}^n$	317
8.4.2	Globalisierung des Newton-Verfahrens	326
8.5	Exkurs: Nullstellensuche im Komplexen.	334
8.5.1	Das Verfahren von Bairstow.	338
8.5.2	Das komplexe Newton-Verfahren	341
8.6	Exkurs: Fast Inverse Square Root	346
8.6.1	Shading – Schnelle Berechnung von Normalvektoren	347
8.6.2	Newton-Verfahren zur Berechnung der inversen Wurzel.	348
8.6.3	Bestimmung des Startwerts	350
9	Interpolation und Approximation	359
9.1	Polynominterpolation.	361
9.1.1	Lagrangesche Basispolynome	362
9.1.2	Newtonsche Basispolynome	364
9.1.3	Interpolation von Funktionen und Fehlerabschätzungen.	370
9.1.4	Hermiteinterpolation	376
9.2	Stückweise Interpolation	376
9.3	Numerische Differentiation	384
9.3.1	Approximation der ersten Ableitung	384
9.3.2	Approximation der zweiten Ableitung.	386

9.3.3	Stabilität der numerischen Differentiation	388
9.4	Richardson-Extrapolation zum Limes	389
9.5	Bestapproximation	396
9.5.1	Gauß-Approximation – beste Approximation in der L^2 -Norm	397
9.5.2	Tschebyscheff-Approximation	411
9.5.3	Optimale Lagrange-Interpolation	420
9.6	Trigonometrische Interpolation	422
9.7	Diskrete Fourier-Transformation	430
9.8	Exkurs: Das JPEG-Format zur Komprimierung von Bildern	433
9.9	Exkurs: Numerische Bausteine zur Lösung von Anfangswertproblemen	441
9.9.1	Herleitung des Anfangswertproblems	442
9.9.2	Numerische Behandlung	442
9.9.3	Ein lineares Anfangswertproblem	444
9.9.4	Ein nichtlineares Anfangswertproblem	448
10	Numerische Integration	451
10.1	Interpolatorische Quadratur	453
10.2	Stückweise interpolatorische Quadraturformeln	459
10.3	Romberg-Quadratur	462
10.4	Gauß-Quadratur	469
10.4.1	Gauß-Legendre-Quadratur	472
10.4.2	Gauß-Tschebyscheff-Quadratur	480
10.5	Exkurs: Keplersche Fassregel	484
11	Gradientenverfahren und künstliche neuronale Netze	487
11.1	Nichtlineare Optimierung	488
11.1.1	Das Gradientenverfahren	489
11.1.2	Das Newton-Verfahren zur Minimierung	492
11.2	Abstiegs- und Gradientenverfahren für lineare Gleichungssysteme	495
11.3	Konvergenzbeweis des CG-Verfahrens	503
11.4	Exkurs: Preisbildung für Honigverkauf	507
11.5	Künstliche neuronale Netze	512
11.5.1	Aufbau künstlicher neuronaler Netze	513
11.5.2	Approximation mit neuronalen Netzen	517
11.5.3	Trainieren von künstlichen neuronalen Netzen	522
11.6	Exkurs: Eigenwertbestimmung mit künstlichen neuronalen Netzen	535
11.6.1	Training des Netzes	536
11.6.2	Einfluss der Netzwerkgröße	537
11.6.3	Einfluss der Trainingsdaten	538
11.6.4	Generalisierung	539

Inhaltsverzeichnis	XIII
Verzeichnis der Exkurse	543
Python-Programme und jupyter-Notebooks	545
Literatur	547
Stichwortverzeichnis	551