

Inhalt

1	Einleitung	19
2	Theoretische Betrachtungen zur Unendlichkeit	24
2.1	Versuch einer Begriffsbestimmung	25
2.1.1	Unendlichkeit in der Antike: <i>Apeiron</i>	25
2.1.2	Aristoteles und andere: potentielle und aktuelle Unendlichkeit	28
2.1.3	Unendlichkeit nach der Antike	30
2.1.4	Cantors Paradies	35
2.1.5	Fazit: Apeiron, Unendlichkeit, Transfinitum	38
2.2	Unendlichkeit der Natürlichen Zahlen	40
2.3	Das Kontinuum der reellen Zahlen	43
2.4	Mathematikdidaktische Überlegungen zur Unendlichkeit	45
2.4.1	Unendlichkeit im Mathematikunterricht (schulformübergreifend)	45
2.4.2	Kontinuum und Grenzwerte: Unendlichkeit an den weiterführenden Schulen	49
2.4.3	Unendlichkeit in der Grundschule	53
3	Philosophieren im Mathematikunterricht	56
3.1	Vorteile des Einbindens philosophischer Inhalte und Methoden (allgemein)	57
3.1.1	P4C – Philosophy for Children	57
3.1.2	Dialoge im Unterricht, dialogisches Lernen	58
3.1.3	Philosophieren als Unterrichtsprinzip	59
3.2	Vorteile des Einbindens philosophischer Inhalte im Mathematikunterricht	60
3.2.1	P4CM	61
3.3	Ausgewählte Methoden des Philosophieunterrichts	63
3.3.1	5-Finger-Modell	63
3.3.2	Bonbon-Modell	64
3.3.3	(Neo-)Sokratische Gespräche	65
4	Unterrichtsdesigns	67
4.1	Didaktisch-methodische Vorüberlegungen	68
4.2	Übersicht der Stunden und Sampling	70
4.3	U1: Robert und der Zahlenteufel in der Welt der Mathematik . . .	72
4.3.1	Fachliche Hintergründe: Was ist Mathematik?	72
4.3.2	Didaktischer Kommentar und Reflexion der Planung	76
4.3.3	Kurzvorstellung einiger interessanter Dokumente aus den Unterrichtsphasen	78

4.4	U2: Robert und der Zahlenteufel treffen Cantor und Leibniz	81
4.4.1	Fachliche Hintergründe: Cantors unendliche Mengen und Leibniz' Einwand	81
4.4.2	Didaktischer Kommentar und Reflexion der Planung	83
4.5	U3: Robert und der Zahlenteufel zu Gast in Hilberts Hotel	86
4.5.1	Fachliche Hintergründe: Hilberts Hotel	86
4.5.2	Didaktischer Kommentar und Reflexion der Planung	86
4.5.3	Entstandene Dokumente aus Phase U3.B	88
4.5.3.1	Der Zahlenteufel bekommt kein Zimmer, sondern einen anderen Platz im Hotel	89
4.5.3.2	Ein oder mehrere Gäste werden des Hotels verwiesen, der Zahlenteufel rückt auf	90
4.5.3.3	Gäste rücken zusammen, dadurch wird ein Zimmer frei	90
4.5.3.4	Das geht doch gar nicht!	90
4.6	U4: Paradoxien und Antinomien	92
4.6.1	Fachliche Hintergründe: Paradoxien und Antinomien der Unendlichkeit	92
4.6.1.1	Taxonomie und Klassifikationsmöglichkeiten	92
4.6.1.2	Die Zenon'schen Paradoxien	94
4.6.1.3	Das Barbier-Paradoxon/die Russell'sche Antinomie	98
4.6.2	Didaktischer Kommentar und Reflexion der Planung	99
5	Methodik	105
5.1	Zur Rolle der Unterrichtsdesigns	106
5.2	Interaktionsanalyse	109
5.2.1	Interaktionale Verdichtungen und interaktionaler Gleichfluss	110
5.3	Argumentationsanalyse	111
5.4	Qualitative Inhaltsanalyse	113
5.5	Zusammenspiel der Auswertungs- bzw. Analysemethoden	116
6	Rekonstruktion ausgewählter Szenen	117
6.1	Gruppenarbeit: Nadja, Nadine, Berat und Kilian	118
6.2	Pro-Contra-Debatte: Grundschule	130
6.3	Pro-Contra-Debatte: Gesamtschule	162
6.4	Entweder es ist unendlich, dann kann ich nicht soweit zählen	191
6.4.1	Klassengespräch Grundschule: Herr Bämpfer, Frau Ellestar	191
6.4.2	Klassengespräch Gesamtschule: Frau Fichtel	197
7	Argumentationsprozesse im philosophischen Gespräch	206
7.1	Interaktionsmuster zwischen Lehrkräften und Schüler*innen	207
7.1.1	Beispielszene 1: Herr Bämpfer, Rosa und Frau Ellestar	208
7.1.2	Beispielszene 2: Frau Fichtel und Tami	209
7.1.3	Beispielszene 3: Frau Fichtel und Beatrice	211
7.1.4	Beispielszene 4: Herr Bämpfer und Rosa	211
7.2	Ermöglichungs- und Erschwerungsgrundlagen für Verdichtungen	212
7.2.1	Erschwerungsgrundlagen	213
7.2.2	Ermöglichungsgrundlagen	214

7.3	Wie argumentieren die Kinder in den p.-m.-Gesprächen?	216
7.3.1	Das Phänomen der <i>reductio ad absurdum</i> innerhalb der Pro-Contra-Debatten	216
7.3.2	Das Phänomen der kollektiven Akzeptanz eines Datums trotz diametral entwickelter Konklusionen	218
7.3.3	Das Phänomen des Hinterfragens der Gültigkeit von Argumenten	219
7.3.4	Weitere Phänomene in den Argumentationen	219
7.3.5	Charakteristika der Argumentationen	220
7.3.5.1	Kollektiv vertiefte Argumentationen	220
7.3.5.2	Kollektiv-sukzessiv analytische Argumentationen	221
7.3.5.3	Erhöhte Explizität bei flachen Hierarchien	222
7.3.5.4	Verbales Argumentieren	223
7.3.5.5	Kurzzusammenfassung: Charakteristika	223
7.4	Inhaltliche Aspekte des Konzepts Unendlichkeit	224
7.4.1	Nomen – Adjektiv – Adverb	224
7.4.2	Objekt – Prozess	226
7.4.3	Interpretation der Ergebnisse	228
8	Zusammenfassung der Ergebnisse	230
8.1	Übergeordnete Forschungsfrage: Sinnhaftigkeit, Sinnstiftung	230
8.2	Untergeordnete Forschungsfragen	233
9	Limitationen und Diskussion	235
10	Ausblick	239
10.1	Beitrag zur Mathematikdidaktik	239
10.2	Unterrichtspraktische Schlussfolgerungen	240
10.3	Anknüpfende Forschungsdesiderata	241
	Literatur	243
11	Anhang	258
11.1	Daten einer explorativen Studie an der Universität Leipzig	258
11.2	Tabellarische Verlaufspläne der Unterrichtsentwürfe	261
11.3	Eingesetzte Texte und Bilder	266
11.3.1	U1: erster Text	266
11.3.2	U1: zweiter Text	267
11.3.3	U2: Text	268
11.3.4	U3: Text	271
11.3.5	U4: Text	273
11.3.6	Bilder	275
11.4	Vorschläge für Anknüpfungspunkte in den Lehrplänen	278