

# Inhalt

<b>1 Einleitung</b>	<b>19</b>
<b>2 Theoretische Betrachtungen zur Unendlichkeit</b>	<b>24</b>
2.1 Versuch einer Begriffsbestimmung . . . . .	25
2.1.1 Unendlichkeit in der Antike: <i>Apeiron</i> . . . . .	25
2.1.2 Aristoteles und andere: potentielle und aktuale Unendlichkeit	28
2.1.3 Unendlichkeit nach der Antike . . . . .	30
2.1.4 Cantors Paradies . . . . .	35
2.1.5 Fazit: Apeiron, Unendlichkeit, Transfinitum . . . . .	38
2.2 Unendlichkeit der Natürlichen Zahlen . . . . .	40
2.3 Das Kontinuum der reellen Zahlen . . . . .	43
2.4 Mathematikdidaktische Überlegungen zur Unendlichkeit . . . . .	45
2.4.1 Unendlichkeit im Mathematikunterricht (schulformübergreifend) . . . . .	45
2.4.2 Kontinuum und Grenzwerte: Unendlichkeit an den weiterführenden Schulen . . . . .	49
2.4.3 Unendlichkeit in der Grundschule . . . . .	53
<b>3 Philosophieren im Mathematikunterricht</b>	<b>56</b>
3.1 Vorteile des Einbindens philosophischer Inhalte und Methoden (allgemein) . . . . .	57
3.1.1 P4C – Philosophy for Children . . . . .	57
3.1.2 Dialoge im Unterricht, dialogisches Lernen . . . . .	58
3.1.3 Philosophieren als Unterrichtsprinzip . . . . .	59
3.2 Vorteile des Einbindens philosophischer Inhalte im Mathematikunterricht . . . . .	60
3.2.1 P4CM . . . . .	61
3.3 Ausgewählte Methoden des Philosophieunterrichts . . . . .	63
3.3.1 5-Finger-Modell . . . . .	63
3.3.2 Bonbon-Modell . . . . .	64
3.3.3 (Neo-)Sokratische Gespräche . . . . .	65
<b>4 Unterrichtsdesigns</b>	<b>67</b>
4.1 Didaktisch-methodische Vorüberlegungen . . . . .	68
4.2 Übersicht der Stunden und Sampling . . . . .	70
4.3 U1: Robert und der Zahlenteufel in der Welt der Mathematik . . .	72
4.3.1 Fachliche Hintergründe: Was ist Mathematik? . . . . .	72
4.3.2 Didaktischer Kommentar und Reflexion der Planung . . . . .	76
4.3.3 Kurzvorstellung einiger interessanter Dokumente aus den Unterrichtsphasen . . . . .	78

4.4	U2: Robert und der Zahlenteufel treffen Cantor und Leibniz . . . . .	81
4.4.1	Fachliche Hintergründe: Cantors unendliche Mengen und Leibniz' Einwand . . . . .	81
4.4.2	Didaktischer Kommentar und Reflexion der Planung . . . . .	83
4.5	U3: Robert und der Zahlenteufel zu Gast in Hilberts Hotel . . . . .	86
4.5.1	Fachliche Hintergründe: Hilberts Hotel . . . . .	86
4.5.2	Didaktischer Kommentar und Reflexion der Planung . . . . .	86
4.5.3	Entstandene Dokumente aus Phase U3.B . . . . .	88
	4.5.3.1 Der Zahlenteufel bekommt kein Zimmer, sondern einen anderen Platz im Hotel . . . . .	89
	4.5.3.2 Ein oder mehrere Gäste werden des Hotels verwie- sen, der Zahlenteufel rückt auf . . . . .	90
	4.5.3.3 Gäste rücken zusammen, dadurch wird ein Zimmer frei . . . . .	90
	4.5.3.4 Das geht doch gar nicht! . . . . .	90
4.6	U4: Paradoxien und Antinomien . . . . .	92
4.6.1	Fachliche Hintergründe: Paradoxien und Antinomien der Un- endlichkeit . . . . .	92
4.6.1.1	Taxonomie und Klassifikationsmöglichkeiten . . . . .	92
4.6.1.2	Die Zenon'schen Paradoxien . . . . .	94
4.6.1.3	Das Barbier-Paradoxon/die Russell'sche Antinomie	98
4.6.2	Didaktischer Kommentar und Reflexion der Planung . . . . .	99
<b>5</b>	<b>Methodik</b>	<b>105</b>
5.1	Zur Rolle der Unterrichtsdesigns . . . . .	106
5.2	Interaktionsanalyse . . . . .	109
	5.2.1 Interaktionale Verdichtungen und interaktionaler Gleichfluss	110
5.3	Argumentationsanalyse . . . . .	111
5.4	Qualitative Inhaltsanalyse . . . . .	113
5.5	Zusammenspiel der Auswertungs- bzw. Analysemethoden . . . . .	116
<b>6</b>	<b>Rekonstruktion ausgewählter Szenen</b>	<b>117</b>
6.1	Gruppenarbeit: Nadja, Nadine, Berat und Kilian . . . . .	118
6.2	Pro-Contra-Debatte: Grundschule . . . . .	130
6.3	Pro-Contra-Debatte: Gesamtschule . . . . .	162
6.4	Entweder es ist unendlich, dann kann ich nicht soweit zählen . . . . .	191
	6.4.1 Klassengespräch Grundschule: Herr Bämpfer, Frau Ellestar	191
	6.4.2 Klassengespräch Gesamtschule: Frau Fichtel . . . . .	197
<b>7</b>	<b>Argumentationsprozesse im philosophischen Gespräch</b>	<b>206</b>
7.1	Interaktionsmuster zwischen Lehrkräften und Schüler*innen . . . . .	207
	7.1.1 Beispielszene 1: Herr Bämpfer, Rosa und Frau Ellestar . . . . .	208
	7.1.2 Beispielszene 2: Frau Fichtel und Tami . . . . .	209
	7.1.3 Beispielszene 3: Frau Fichtel und Beatrice . . . . .	211
	7.1.4 Beispielszene 4: Herr Bämpfer und Rosa . . . . .	211
7.2	Ermöglichungs- und Erschwerungsgrundlagen für Verdichtungen . . . . .	212
	7.2.1 Erschwerungsgrundlagen . . . . .	213
	7.2.2 Ermöglichungsgrundlagen . . . . .	214

7.3	Wie argumentieren die Kinder in den p.-m.-Gesprächen? . . . . .	216
7.3.1	Das Phänomen der <i>reductio ad absurdum</i> innerhalb der Pro- Contra-Debatten . . . . .	216
7.3.2	Das Phänomen der kollektiven Akzeptanz eines Datums trotz diametral entwickelter Konklusionen . . . . .	218
7.3.3	Das Phänomen des Hinterfragens der Gültigkeit von Argu- menten . . . . .	219
7.3.4	Weitere Phänomene in den Argumentationen . . . . .	219
7.3.5	Charakteristika der Argumentationen . . . . .	220
7.3.5.1	Kollektiv vertiefte Argumentationen . . . . .	220
7.3.5.2	Kollektiv-sukzessiv analytische Argumentationen .	221
7.3.5.3	Erhöhte Explizität bei flachen Hierarchien . . . . .	222
7.3.5.4	Verbales Argumentieren . . . . .	223
7.3.5.5	Kurzzusammenfassung: Charakteristika . . . . .	223
7.4	Inhaltliche Aspekte des Konzepts Unendlichkeit . . . . .	224
7.4.1	Nomen – Adjektiv – Adverb . . . . .	224
7.4.2	Objekt – Prozess . . . . .	226
7.4.3	Interpretation der Ergebnisse . . . . .	228
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung der Ergebnisse</b>	<b>230</b>
8.1	Übergeordnete Forschungsfrage: Sinnhaftigkeit, Sinnstiftung . . . .	230
8.2	Untergeordnete Forschungsfragen . . . . .	233
<b>9</b>	<b>Limitationen und Diskussion</b>	<b>235</b>
<b>10</b>	<b>Ausblick</b>	<b>239</b>
10.1	Beitrag zur Mathematikdidaktik . . . . .	239
10.2	Unterrichtspraktische Schlussfolgerungen . . . . .	240
10.3	Anknüpfende Forschungsdesiderata . . . . .	241
<b>Literatur</b>		<b>243</b>
<b>11</b>	<b>Anhang</b>	<b>258</b>
11.1	Daten einer explorativen Studie an der Universität Leipzig . . . .	258
11.2	Tabellarische Verlaufspläne der Unterrichtsentwürfe . . . . .	261
11.3	Eingesetzte Texte und Bilder . . . . .	266
11.3.1	U1: erster Text . . . . .	266
11.3.2	U1: zweiter Text . . . . .	267
11.3.3	U2: Text . . . . .	268
11.3.4	U3: Text . . . . .	271
11.3.5	U4: Text . . . . .	273
11.3.6	Bilder . . . . .	275
11.4	Vorschläge für Anknüpfungspunkte in den Lehrplänen . . . . .	278