

Inhaltsverzeichnis

1	Zahlenbereiche	1
1.1	Mengen	1
1.2	Natürliche, ganze und rationale Zahlen	3
1.3	Reelle Zahlen	4
1.4	Komplexe Zahlen	8
2	Funktionen	19
2.1	Funktionen als Modelle der Wirklichkeit	19
2.2	Der Funktionsbegriff	21
2.3	Eigenschaften von Funktionen	26
2.3.1	Umkehrbare Funktionen	26
2.3.2	Verkettung von Funktionen	30
2.3.3	Beschränktheit und absolute Extrema	31
2.3.4	Monotonie	33
3	Elementare Funktionen	37
3.1	Signum- und Betragsfunktion	37
3.2	Ganze rationale Funktionen	39
3.2.1	Modellierung realer Vorgänge mittels Potenzfunktionen	39
3.2.2	Definition ganzer rationaler Funktionen	41
3.2.3	Affine Funktionen	42
3.2.4	Quadratische Funktionen	44
3.2.5	Ganze rationale Funktionen beliebigen Grades	48
3.3	Gebrochene rationale Funktionen	55
3.4	Allgemeine Potenz- und algebraische Funktionen	57
3.5	Trigonometrische Funktionen	60
3.5.1	Trigonometrie	60
3.5.2	Trigonometrische Funktionen	62
3.5.3	Inverse trigonometrische Funktionen	64
3.6	Exponentialfunktion und Logarithmus	69
3.6.1	Allgemeine und natürliche Exponentialfunktion	69
3.6.2	Logarithmusfunktionen	73
3.6.3	Hyperbolische Funktionen	77
3.6.4	Die Euler'sche Formel	81

4	Lineare Gleichungssysteme	85
4.1	Problemstellung	85
4.2	Das Gauß'sche Eliminationsverfahren	87
5	Vektorrechnung	103
5.1	Vektorielle Größen in Alltag und Technik	103
5.2	Vektoren im Anschauungsraum	104
5.3	Allgemeine Vektorräume	111
5.4	Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit	116
5.5	Basis und Dimension	122
6	Produkte von Vektoren	127
6.1	Das Skalarprodukt	127
6.2	Das Vektorprodukt	132
6.3	Das Spatprodukt	139
7	Analytische Geometrie	143
7.1	Probleme im Raum	143
7.2	Parameterdarstellung von Geraden	144
7.3	Parameterdarstellung von Ebenen	148
7.4	Hyperebenen in Gleichungsform	153
7.5	Schnittprobleme	157
7.6	Abstandsberechnungen	164
7.7	Winkelberechnungen	172
7.8	Kreis und Kugel	177
8	Matrizen	183
8.1	Transformationen in der Ebene und im Raum	183
8.2	Matrizenaddition und Matrizenmultiplikation	184
8.3	Invertieren von Matrizen	194
8.4	Koordinatentransformation	199
8.5	Abbildungen	203
8.5.1	Abbildungen in der Ebene	203
8.5.2	Abbildungen im Raum	206
8.6	Determinanten	211
9	Eigenwerte	221
9.1	Problemstellungen in der Anwendung	221
9.2	Eigenwerte und Eigenvektoren	225
10	Grenzwerte	233
10.1	Folgen	233
10.2	Der Grenzwertbegriff bei Folgen	236
10.3	Die Euler'sche Zahl e	242

10.4	Der Grenzwertbegriff bei Funktionen	246
10.5	Stetigkeit	253
11	Differenzialrechnung	257
11.1	Der Ableitungsbegriff	257
11.1.1	Das Tangentenproblem	257
11.1.2	Die Momentangeschwindigkeit	260
11.1.3	Die Ableitungsfunktionen	261
11.1.4	Weitere Anwendungen	262
11.2	Ableitungsregeln	266
11.2.1	Notwendigkeit von Ableitungsregeln	266
11.2.2	Grundlegende Eigenschaften der Ableitung	267
11.2.3	Ableitung elementarer Funktionen	269
11.2.4	Produkt- und Quotientenregel	272
11.2.5	Kettenregel	275
11.2.6	Ableitung der Umkehrfunktion	277
11.2.7	Weitere Ableitungen elementarer Funktionen	278
11.2.8	Beispiele	282
11.3	Mittelwertsatz und stetige Differenzierbarkeit	287
12	Anwendungen der Differenzialrechnung	289
12.1	Monotonieuntersuchungen	289
12.2	Extremwertprobleme	290
12.3	Der Regenbogen	300
12.4	Wendepunkte und Kurvendiskussion	306
12.5	Regel von Bernoulli-de l'Hospital	311
12.6	Das Newton-Verfahren	315
13	Unbestimmtes Integral	319
13.1	Stammfunktionen und unbestimmtes Integral	319
13.2	Integrationsmethoden	322
13.2.1	Produktintegration	323
13.2.2	Substitutionsregel	325
13.2.3	Partialbruchzerlegung	328
14	Bestimmtes Integral	335
14.1	Flächeninhaltsproblem und Definition des bestimmten Integrals	335
14.2	Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung	340
14.3	Uneigentliche Integrale	348
15	Numerische Integration	351
15.1	Problemstellung	351
15.2	Trapezregel	353
15.3	Kepler-Fassregel und Simpson-Regel	356

16 Anwendungen der Integralrechnung	361
16.1 Flächenberechnungen	361
16.2 Volumina von Rotationskörpern	364
16.3 Physikalische Anwendungen	367
16.3.1 Die Arbeit	368
16.3.2 Hydrostatischer Druck	369
16.3.3 Schwerpunkt	370
16.4 Wahrscheinlichkeitsrechnung	373
17 Reihen	377
17.1 Der Reihensbegriff	377
17.2 Konvergenzkriterien	384
18 Potenzreihen	395
18.1 Der Begriff der Potenzreihe	395
18.2 Potenzreihen und Funktionen – Der Satz von Taylor	401
18.3 Wichtige Potenzreihenentwicklungen	406
18.3.1 Exponentialreihe	406
18.3.2 Trigonometrische Reihen	407
18.3.3 Hyperbolische Reihen	411
18.3.4 Logarithmusreihe	412
18.3.5 Binomische Reihe	414
18.4 Anwendungen	417
18.4.1 Näherungsweise Berechnung von Funktionswerten	417
18.4.2 Grenzwertberechnung	418
18.4.3 Integration elementar nicht integrierbarer Funktionen	420
18.4.4 Klassische und relativistische kinetische Energie	421
18.4.5 Viertelsmethode zum Abstecken von Kreisbögen	423
19 Fourier-Reihen und Fourier-Transformation	427
19.1 Trigonometrische Reihen	427
19.2 Fourier-Reihen	429
19.3 Komplexe Schreibweise der Fourier-Reihen	440
19.4 Fourier-Transformation	447
20 Differenzialrechnung von Funktionen mehrerer Veränderlicher	453
20.1 Funktionen mehrerer Veränderlicher	453
20.2 Der Stetigkeitsbegriff	457
20.3 Partielle Ableitungen	458
20.4 Totales Differenzial	464
20.4.1 Die Idee des totalen Differenzials	464
20.4.2 Anwendung: Fehlerrechnung	468
20.4.3 Ableitung impliziter Funktionen	470
20.5 Richtungsableitung	474

20.6	Partielle Ableitungen höherer Ordnung	480
20.7	Divergenz und Rotation	483
21	Extrema bei Funktionen mehrerer Veränderlicher	487
21.1	Extrema ohne Nebenbedingungen	487
21.2	Anwendung: Lineare Regression	496
21.3	Extrema mit Nebenbedingungen	501
22	Mehrfache Integrale	511
22.1	Bereichsintegrale	511
22.2	Berechnung von Bereichsintegralen über Normalbereichen	513
22.3	Mehrfache Integrale in Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten	520
23	Allgemeine Kurven	527
23.1	Der Kurvenbegriff	527
23.2	Tangentenvektor und Tangente	532
23.3	Bogenlänge und Bogenlängenparametrisierung	536
23.4	Die Krümmung	544
23.5	Das allgemeine Kurvenintegral	552
24	Gewöhnliche Differenzialgleichungen	557
24.1	Der Begriff der Differenzialgleichung	557
24.2	Explizite Differenzialgleichung erster Ordnung	559
24.2.1	Geometrische Lösung	559
24.2.2	Lösung durch Trennung der Veränderlichen	562
24.2.3	Lineare Differenzialgleichung erster Ordnung	567
24.3	Schwingungsdifferenzialgleichung	576
	Anhang	585
	Lösungen der Aufgaben	587
	Sachverzeichnis	623