

|          |                                                                                                |           |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Von gewöhnlichen und partiellen Differenzialgleichungen. . . . .</b>                        | <b>1</b>  |
| 1.1      | Gewöhnliche Differenzialgleichungen 1. und 2. Ordnung . . . . .                                | 1         |
| 1.2      | Partielle Differenzialgleichungen 1. und 2. Ordnung . . . . .                                  | 5         |
| 1.2.1    | Quasilineare partielle Differenzialgleichung. . . . .                                          | 9         |
| 1.2.2    | Klassifizierung partieller Differenzialgleichungen<br>2. Ordnung . . . . .                     | 10        |
| 1.2.3    | Bekannte Differenzialgleichungen aus der Physik . . . . .                                      | 11        |
| <b>2</b> | <b>Mathematische Werkzeuge zum Umgang mit partiellen<br/>Differenzialgleichungen . . . . .</b> | <b>13</b> |
| 2.1      | Sturm-Liouvillesche Differenzialgleichung. . . . .                                             | 13        |
| 2.1.1    | Eigenfunktionen und Fundamentallösungen . . . . .                                              | 15        |
| 2.1.2    | Nützliche Eigenwertgleichungen mit Fundamentallösungen . . .                                   | 17        |
| 2.2      | Orthogonale Funktionen . . . . .                                                               | 18        |
| 2.2.1    | Reihenentwicklungen mit orthogonalen Funktionen. . . . .                                       | 21        |
| 2.2.2    | Normen und orthonormale Funktionen . . . . .                                                   | 26        |
| 2.3      | Heaviside-Distribution. . . . .                                                                | 28        |
| 2.3.1    | Definition der Heaviside-Funktion . . . . .                                                    | 29        |
| 2.3.2    | Heaviside-Funktion aus stückeise zusammengesetzten<br>Funktionen . . . . .                     | 33        |
| 2.3.3    | Ableitungsregeln für Heaviside-Distributionen. . . . .                                         | 35        |
| 2.4      | Dirac-Distribution . . . . .                                                                   | 36        |
| 2.4.1    | Rechenregeln für Dirac-Distributionen . . . . .                                                | 38        |
| 2.4.2    | Gerade und ungerade Dirac-Distributionen. . . . .                                              | 47        |
| 2.4.3    | Stammfunktion der Dirac-Distribution . . . . .                                                 | 49        |
| 2.4.4    | Dirac-Impulsfolgen . . . . .                                                                   | 50        |
| 2.4.5    | Beispiele aus der Statik . . . . .                                                             | 53        |
| 2.5      | Signum-Funktion . . . . .                                                                      | 61        |

|       |                                                                                         |     |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 2.6   | Faltung . . . . .                                                                       | 62  |
| 2.6.1 | Einführendes Beispiel einer Faltung . . . . .                                           | 63  |
| 2.6.2 | Anschauliche Faltung . . . . .                                                          | 65  |
| 2.7   | Greensche Funktion . . . . .                                                            | 75  |
| 2.7.1 | Theorie zur Greenschen Funktion für Anfangswertprobleme . . .                           | 75  |
| 2.7.2 | Greensche Funktion für Randwertprobleme . . . . .                                       | 87  |
| 2.7.3 | Greensche Funktion aus korrespondierender Greenschen<br>Differenzialgleichung . . . . . | 96  |
| 2.8   | Gradient und Richtungsableitung . . . . .                                               | 127 |
| 2.8.1 | Gradient einer mehrdimensionalen Funktion . . . . .                                     | 127 |
| 2.8.2 | Richtungsableitung einer zweidimensionalen Funktion . . . . .                           | 130 |
| 2.9   | Lineare und nichtlineare algebraische Gleichungen . . . . .                             | 138 |
| 2.9.1 | LambertW-Funktion . . . . .                                                             | 145 |
| 2.9.2 | Zur Konvergenz von Fixpunktiterationen . . . . .                                        | 145 |
| 3     | <b>Integraltransformationen</b> . . . . .                                               | 149 |
| 3.1   | Fourier-Transformation . . . . .                                                        | 150 |
| 3.1.1 | Symbolische Fourier-Transformationen gewöhnlicher<br>Ableitungen . . . . .              | 153 |
| 3.1.2 | Symbolische Fourier-Transformationen für partielle<br>Ableitungen . . . . .             | 155 |
| 3.1.3 | Fourier-Korrespondenzen . . . . .                                                       | 156 |
| 3.2   | Laplace-Transformation . . . . .                                                        | 164 |
| 3.2.1 | Transformation von Basis-Funktionen . . . . .                                           | 166 |
| 3.2.2 | Rechenregeln der Laplace-Transformation . . . . .                                       | 171 |
| 3.2.3 | Beispiele zur Laplace-Transformation von<br>Differenzialgleichungen. . . . .            | 176 |
| 3.2.4 | Inverse Laplace-Transformationen . . . . .                                              | 180 |
| 3.2.5 | Laplace-Korrespondenzen . . . . .                                                       | 187 |
| 3.2.6 | Laplace-Transformationen partieller<br>Differenzialgleichungen. . . . .                 | 188 |
| 3.3   | Fourier-Sinus-Transformation . . . . .                                                  | 197 |
| 3.3.1 | Wärmeleitungsgleichung mit<br>Dirichlet-Anfangsbedingung . . . . .                      | 200 |
| 3.4   | Fourier-Kosinus-Transformation . . . . .                                                | 207 |
| 4     | <b>Partielle Differenzialgleichungen erster Ordnung</b> . . . . .                       | 211 |
| 4.1   | Charakteristikenverfahren . . . . .                                                     | 211 |
| 4.1.1 | Einführung . . . . .                                                                    | 212 |
| 4.1.2 | Homogene partielle Differenzialgleichungen<br>mit konstanten Koeffizienten . . . . .    | 218 |

|       |                                                                                        |     |
|-------|----------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.1.3 | Inhomogene partielle Differenzialgleichungen<br>mit konstanten Koeffizienten . . . . . | 225 |
| 4.1.4 | Klassische Charakteristikenmethode . . . . .                                           | 235 |
| 4.2   | Lösungsscharen . . . . .                                                               | 273 |
| 4.2.1 | Einführendes Beispiel . . . . .                                                        | 274 |
| 4.3   | Lineare Koordinatentransformationen . . . . .                                          | 304 |
| 4.3.1 | Allgemeines zur Koordinatentransformation. . . . .                                     | 305 |
| 4.3.2 | Koordinatentransformation als Lösungsmethode für<br>Differenzialgleichungen. . . . .   | 313 |
| 5     | <b>Elliptische Differenzialgleichungen</b> . . . . .                                   | 337 |
| 5.1   | Laplace-Gleichung. . . . .                                                             | 338 |
| 5.1.1 | Mittelwertsatz der Potenzialtheorie . . . . .                                          | 339 |
| 5.1.2 | Produktansätze zur Lösung der Laplace-Gleichungen . . . . .                            | 341 |
| 5.2   | Poisson-Gleichung . . . . .                                                            | 383 |
| 6     | <b>Hyperbolische Differenzialgleichungen</b> . . . . .                                 | 407 |
| 6.1   | Eigenschaften der Wellen. . . . .                                                      | 407 |
| 6.2   | Wellengleichung. . . . .                                                               | 411 |
| 6.3   | Transversalschwingungen am frei aufliegenden Balken . . . . .                          | 456 |
| 6.4   | Besondere Aufgaben zum Experimentieren. . . . .                                        | 464 |
| 7     | <b>Parabolische Differenzialgleichungen</b> . . . . .                                  | 467 |
| 7.1   | Eindimensionale Wärmeleitung. . . . .                                                  | 468 |
| 7.2   | Wärmeleitung in einem Körper mit innerer<br>Wärmequelle/Wärmesenke . . . . .           | 496 |
| 7.3   | Greensche Funktion der Wärmeleitungsgleichung . . . . .                                | 510 |
| 7.4   | Einfache Differenzialgleichungen aus der Physik . . . . .                              | 556 |
| 7.5   | Instationäre zweidimensionale Wärmeleitungsgleichung . . . . .                         | 576 |
| 8     | <b>Computeralgebrasystem (CAS)</b> . . . . .                                           | 585 |
| 8.1   | Mathematische Ausdrücke vereinfachen . . . . .                                         | 586 |
| 8.2   | Mathematische Ausdrücke ausrechnen . . . . .                                           | 586 |
| 8.3   | Quadratische Gleichung lösen . . . . .                                                 | 587 |
| 8.4   | Lineares Gleichungssystem lösen . . . . .                                              | 588 |
| 8.5   | Nichtlineare Gleichungen lösen. . . . .                                                | 588 |
| 8.6   | Diagramme und Zeichnungen anfertigen. . . . .                                          | 589 |
| 8.7   | Funktionen ableiten . . . . .                                                          | 589 |
| 8.8   | Mehrdimensionale Funktionen ableiten. . . . .                                          | 590 |
| 8.9   | Funktionen integrieren. . . . .                                                        | 592 |
| 8.10  | Gewöhnliche Differenzialgleichungen lösen. . . . .                                     | 593 |
| 8.11  | Laplace-Transformationen. . . . .                                                      | 594 |

---

|          |                                                                          |            |
|----------|--------------------------------------------------------------------------|------------|
| 8.12     | Fourier-Transformationen . . . . .                                       | 595        |
| 8.13     | Dirac-Distributionen . . . . .                                           | 596        |
| 8.14     | Verschiedenes. . . . .                                                   | 597        |
| <b>9</b> | <b>Liste der gelösten partiellen Differenzialgleichungen . . . . .</b>   | <b>599</b> |
| 9.1      | Analytisch gelöste partielle Differenzialgleichungen 1. Ordnung. . . . . | 599        |
| 9.2      | Analytisch gelöste partielle Differenzialgleichungen 2. Ordnung. . . . . | 604        |
| 9.3      | Analytisch gelöste partielle Differenzialgleichung 4. Ordnung. . . . .   | 622        |
|          | <b>Literatur. . . . .</b>                                                | <b>623</b> |
|          | <b>Stichwortverzeichnis. . . . .</b>                                     | <b>625</b> |