

Numerische Mathematik

Das Grundwissen für jedermann

Von Prof. Dr. Hans-Görg Roos
und Prof. Dr. Hubert Schwetlick

/



B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig 1999

Inhaltsverzeichnis

Bezeichnungen	10
1 Ziele und Grundprinzipien der Numerischen Mathematik	11
1.1 Modell, Algorithmus, Computerexperiment	11
1.2 Grundprinzipien der Algorithmisierung	14
2 Direkte Verfahren für lineare Gleichungssysteme	19
2.1 Der Gaußsche Algorithmus	20
2.1.1 Die Grundform des Gaußschen Algorithmus	20
2.1.2 Pivotisierung	23
2.1.3 Gaußscher Algorithmus als LU-Faktorisierung	24
2.1.4 Direkte LU-Faktorisierungen und spezielle Matrizen	26
2.2 Störungstheorie, Fehlerabschätzung, iterative Verbesserung	30
2.3 Lineare Quadratmittelprobleme	33
2.3.1 Normalgleichungsverfahren	34
2.3.2 Orthogonalisierungsverfahren	34
2.4 Hinweise auf Software	39
2.5 Übungsaufgaben	40
3 Iterationsverfahren für Gleichungssysteme	41
3.1 Gewöhnliches Iterationsverfahren und Kontraktionssatz	41
3.2 Stationäre Einschrittverfahren für lineare Gleichungssysteme	45
3.2.1 Allgemeine Konvergenzaussagen	45
3.2.2 Basisiterationen: Jacobi, Gauß-Seidel und SOR	46
3.2.3 Richardson-Iteration und Vorkonditionierung	52
3.3 Krylov-Teilraum-Verfahren	54
3.3.1 Symmetrische positiv definite Systeme: CG	55
3.3.2 Unsymmetrische Systeme: CGNR, CGNE und GMRES .	58
3.4 Verfahren für nichtlineare Gleichungssysteme	60
3.4.1 Lineare Konvergenz und das Ostrowski-Theorem	60
3.4.2 Überlineare Konvergenz und Newton-Verfahren	63
3.4.3 Globalisierung	68
3.5 Hinweise auf Software	71
3.6 Übungsaufgaben	71

4 Eigenwertprobleme	73
4.1 Transformationsverfahren	75
4.2 Teilraumiterationsverfahren	81
4.3 Hinweise auf Software	85
4.4 Übungsaufgaben	86
5 Interpolation und Approximation	87
5.1 Interpolation	87
5.1.1 Interpolation mit Polynomen	88
5.1.2 Interpolation mit Splines	97
5.2 Approximation	109
5.2.1 Diskrete Quadratmittelapproximation	109
5.2.2 Weitere Approximationsprinzipien	114
5.3 Hinweise auf Software und ein Ausblick: Mehrdimensionale Interpolation und Approximation	117
5.4 Übungsaufgaben	118
6 Numerische Differentiation und Integration	119
6.1 Differenzenformeln zur Differentiation	119
6.2 Zusammengesetzte Quadraturformeln	122
6.3 Erhöhung der Konvergenzordnung durch Extrapolation	125
6.4 Gauß-Formeln und verwandte optimale Quadraturformeln	128
6.5 Übungsaufgaben	130
7 Anfangswertaufgaben	131
7.1 Explizite Einschrittverfahren	132
7.1.1 Eine Analyse des Euler-Verfahrens	133
7.1.2 Runge-Kutta-Verfahren höherer Ordnung	135
7.1.3 Konsistenz und Stabilität	137
7.1.4 Schrittweitensteuerung	140
7.2 Mehrschrittverfahren	142
7.2.1 Stabilität von Mehrschrittverfahren	144
7.2.2 Startwerte und Prädiktor-Korrektor-Verfahren	146
7.3 A-Stabilität und steife Systeme	147
7.3.1 A-Stabilität	147
7.3.2 Steife Systeme	154
7.4 Hinweise auf Software und ein Ausblick: Algebro-Differentialgleichungen	156
7.5 Übungsaufgaben	157

8 Randwertaufgaben	159
8.1 Eine Einführung in die grundlegenden Diskretisierungstechniken	160
8.2 Spline-Kollokation	170
8.3 Die Methode der finiten Elemente	174
8.3.1 Der Ausgangspunkt der Methode	175
8.3.2 Beispiele von finiten Elementen und die Generierung des diskreten Problems	178
8.3.3 Grundwissen zum Konvergenzverhalten	184
8.3.4 Erweiterungen des Grundkonzeptes	189
8.3.5 Adaptive FEM	194
8.3.6 Das Mehrgitterprinzip	198
8.4 Raum und Zeit	201
8.4.1 Eindimensionale Wärmeleitung	202
8.4.2 Die Linienmethode	204
8.5 Hinweise auf Software	207
8.6 Übungsaufgaben	207
Literaturverzeichnis	211
Sachwortverzeichnis	217