

# **Numerische Mathematik**

Das Grundwissen für jedermann

Von Prof. Dr. Hans-Görg Roos  
und Prof. Dr. Hubert Schwetlick



B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig 1999

# Inhaltsverzeichnis

<b>Bezeichnungen</b>	<b>10</b>
<b>1 Ziele und Grundprinzipien der Numerischen Mathematik</b>	<b>11</b>
1.1 Modell, Algorithmus, Computerexperiment . . . . .	11
1.2 Grundprinzipien der Algorithmisierung . . . . .	14
<b>2 Direkte Verfahren für lineare Gleichungssysteme</b>	<b>19</b>
2.1 Der Gaußsche Algorithmus . . . . .	20
2.1.1 Die Grundform des Gaußschen Algorithmus . . . . .	20
2.1.2 Pivotisierung . . . . .	23
2.1.3 Gaußscher Algorithmus als LU-Faktorisierung . . . . .	24
2.1.4 Direkte LU-Faktorisierungen und spezielle Matrizen . . . . .	26
2.2 Störungstheorie, Fehlerabschätzung, iterative Verbesserung . . . . .	30
2.3 Lineare Quadratmittelprobleme . . . . .	33
2.3.1 Normalgleichungsverfahren . . . . .	34
2.3.2 Orthogonalisierungsverfahren . . . . .	34
2.4 Hinweise auf Software . . . . .	39
2.5 Übungsaufgaben . . . . .	40
<b>3 Iterationsverfahren für Gleichungssysteme</b>	<b>41</b>
3.1 Gewöhnliches Iterationsverfahren und Kontraktionssatz . . . . .	41
3.2 Stationäre Einschrittverfahren für lineare Gleichungssysteme . . . . .	45
3.2.1 Allgemeine Konvergenzaussagen . . . . .	45
3.2.2 Basisiterationen: Jacobi, Gauß-Seidel und SOR . . . . .	46
3.2.3 Richardson-Iteration und Vorkonditionierung . . . . .	52
3.3 Krylov-Teilraum-Verfahren . . . . .	54
3.3.1 Symmetrische positiv definite Systeme: CG . . . . .	55
3.3.2 Unsymmetrische Systeme: CGNR, CGNE und GMRES . . . . .	58
3.4 Verfahren für nichtlineare Gleichungssysteme . . . . .	60
3.4.1 Lineare Konvergenz und das Ostrowski-Theorem . . . . .	60
3.4.2 Überlineare Konvergenz und Newton-Verfahren . . . . .	63
3.4.3 Globalisierung . . . . .	68
3.5 Hinweise auf Software . . . . .	71
3.6 Übungsaufgaben . . . . .	71

<b>4</b>	<b>Eigenwertprobleme</b>	<b>73</b>
4.1	Transformationsverfahren . . . . .	75
4.2	Teilraumiterationsverfahren . . . . .	81
4.3	Hinweise auf Software . . . . .	85
4.4	Übungsaufgaben . . . . .	86
<b>5</b>	<b>Interpolation und Approximation</b> ✓	<b>87</b>
5.1	Interpolation . . . . .	87
5.1.1	Interpolation mit Polynomen . . . . .	88
5.1.2	Interpolation mit Splines . . . . .	97
5.2	Approximation . . . . .	109
5.2.1	Diskrete Quadratmittelapproximation . . . . .	109
5.2.2	Weitere Approximationsprinzipien . . . . .	114
5.3	Hinweise auf Software und ein Ausblick: Mehrdimensionale Interpolation und Approximation . . . . .	117
5.4	Übungsaufgaben . . . . .	118
<b>6</b>	<b>Numerische Differentiation und Integration</b>	<b>119</b>
6.1	Differenzenformeln zur Differentiation . . . . .	119
6.2	Zusammengesetzte Quadraturformeln . . . . .	122
6.3	Erhöhung der Konvergenzordnung durch Extrapolation . . . . .	125
6.4	Gauß-Formeln und verwandte optimale Quadraturformeln . . . . .	128
6.5	Übungsaufgaben . . . . .	130
<b>7</b>	<b>Anfangswertaufgaben</b>	<b>131</b>
7.1	Explizite Einschrittverfahren . . . . .	132
7.1.1	Eine Analyse des Euler-Verfahrens . . . . .	133
7.1.2	Runge-Kutta-Verfahren höherer Ordnung . . . . .	135
7.1.3	Konsistenz und Stabilität . . . . .	137
7.1.4	Schrittweitensteuerung . . . . .	140
7.2	Mehrschrittverfahren . . . . .	142
7.2.1	Stabilität von Mehrschrittverfahren . . . . .	144
7.2.2	Startwerte und Prädiktor-Korrektor-Verfahren . . . . .	146
7.3	A-Stabilität und steife Systeme . . . . .	147
7.3.1	A-Stabilität . . . . .	147
7.3.2	Steife Systeme . . . . .	154
7.4	Hinweise auf Software und ein Ausblick: Algebro-Differential- gleichungen . . . . .	156
7.5	Übungsaufgaben . . . . .	157

<b>8 Randwertaufgaben</b>	<b>159</b>
8.1 Eine Einführung in die grundlegenden Diskretisierungstechniken	160
8.2 Spline-Kollokation . . . . .	170
8.3 Die Methode der finiten Elemente . . . . .	174
8.3.1 Der Ausgangspunkt der Methode . . . . .	175
8.3.2 Beispiele von finiten Elementen und die Generierung des diskreten Problems . . . . .	178
8.3.3 Grundwissen zum Konvergenzverhalten . . . . .	184
8.3.4 Erweiterungen des Grundkonzeptes . . . . .	189
8.3.5 Adaptive FEM . . . . .	194
8.3.6 Das Mehrgitterprinzip . . . . .	198
8.4 Raum und Zeit . . . . .	201
8.4.1 Eindimensionale Wärmeleitung . . . . .	202
8.4.2 Die Linienmethode . . . . .	204
8.5 Hinweise auf Software . . . . .	207
8.6 Übungsaufgaben . . . . .	207
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>211</b>
<b>Sachwortverzeichnis</b>	<b>217</b>