

Inhaltsverzeichnis

Teil I: Theorie	9
1 Existenz- und Eindeutigkeitssätze	9
1.1 Grundlagen	9
1.1.1 Explizite Differentialgleichungen	9
1.1.2 Systeme	10
1.1.3 Zusammenhang von Gleichungen und Systemen	11
1.2 Existenz von Lösungen	13
1.2.1 Existenzsatz von Peano	13
1.2.2 Fortsetzung von Lösungen	14
1.3 Eindeutigkeit von Lösungen	16
1.3.1 Picard-Lindelöf	16
1.3.2 Picard'sches Iterationsverfahren	18
1.3.3 Lipschitz-Stetigkeit bzgl. \vec{y}	19
1.3.4 Weitere Eindeutigkeitssätze	20
1.4 Abhängigkeit der Lösungen	22
1.4.1 Stetige Abhängigkeit der Lösungen	22
1.4.2 Differenzierbare Abhängigkeit der Lösungen	23
2 Explizite Gleichungen 1. Ordnung	25
2.1 Richtungsfelder, Geometrische Interpretation	25
2.1.1 Orthogonale Trajektorien	26
2.2 Differentialungleichungen	27
2.2.1 Maximal- und Minimallösung	28
2.3 Gleichungen mit getrennten Variablen (TdV)	29
2.4 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung	32
2.5 Spezielle integrierbare Gleichungen	35
2.5.1 $y' = f(ax + by + c)$	35
2.5.2 $y' = f(y/x)$ Homogene Gleichungen	36
2.5.3 $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$	37
2.5.4 $y' = a(x)y + b(x)y^\alpha$ Bernoulli-Gleichung	39
2.5.5 $y' = a(x) + b(x)y + c(x)y^2$ Riccati-Gleichung	40
2.5.6 $y' = a x^\alpha + c y^2$ Spezielle Riccati Dgl	42
3 Implizite Gleichungen 1. Ordnung	44
3.1 Reguläre und singuläre Linienelemente	44
3.2 Verwendung von $p = y'$ als Parameter	46

3.2.1	$y = f(x, y')$	47	
3.2.2	$x = g(y, y')$	47	
3.2.3	Legendre-Transformation	48	
3.2.4	$y = xy' + g(y')$	Clairault-Gleichung	49
3.2.5	$y = xf(y') + g(y')$	d'Alembert-Gleichung	50
3.3	Gleichungen der Form $P dx + Q dy = 0$	51	
3.3.1	Exakte Differentialgleichungen	52	
3.3.2	Euler Multiplikatoren	54	
4	Differentialgleichungen und Systeme höherer Ordnung	55	
4.1	Spezielle Gleichungen höherer Ordnung	55	
4.1.1	y kommt nicht vor	55	
4.1.2	x kommt nicht vor	55	
4.1.3	$y'' = g(y)$	57	
4.1.4	$F(x, \frac{y'}{y}, \dots, \frac{y^{(n)}}{y}) = 0$	58	
4.1.5	Exakte Gleichungen höherer Ordnung	59	
4.2	Autonome Gleichungen und Systeme	61	
4.2.1	Autonome Systeme 2. Ordnung	63	
4.3	Potenzreihenansatz	66	
4.3.1	Koeffizientenvergleich	67	
4.3.2	Fortgesetzte Differentiation	68	
4.3.3	Lineare Gleichungen 2. Ordnung mit singulären Stellen	69	
5	Lineare Gleichungen und Systeme	71	
5.1	Komplex- und matrixwertige Funktionen	71	
5.1.1	Matrix-Exponentialfunktion	72	
5.2	Lineare Systeme	74	
5.2.1	Struktur der Lösungen	75	
5.2.2	Zusammenhang von reellen und komplexen Systemen	75	
5.2.3	Homogene Systeme	76	
5.2.4	Reduktionsverfahren von d'Alembert	78	
5.2.5	Homogene Systeme mit konstanten Koeffizienten	79	
5.2.6	Inhomogene Systeme	82	
5.3	Lineare Differentialgleichungen	84	
5.3.1	Struktur der Lösungen	85	
5.3.2	Homogene Gleichungen	85	
5.3.3	Wronski-Determinante	86	
5.3.4	Reduktionsverfahren von d'Alembert	87	
5.3.5	Homogene Gleichungen mit konstanten Koeffizienten	89	

5.3.6	Inhomogene Gleichungen	90
5.3.7	Eulersche Gleichungen	93
5.4	Lineare Gleichungen und Systeme mit periodischen Koeffizienten	95
5.4.1	Gleichungen 2. Ordnung mit periodischen Koeffizienten	97
6	Laplace Transformation	98
6.1	Definition und Beispiele	98
6.2	Rechenregeln	100
6.3	Faltungsprodukt	103
6.4	Anwendungen auf lineare Gleichungen und Systeme	103
6.5	Dirac-Deltafunktion	105
7	Stabilität	108
7.1	Definitionen	108
7.2	Stabilitätssätze für lineare Systeme	109
7.3	Fast-lineare Systeme	112
7.4	Ljapunoff Theorie	114
8	Rand- und Eigenwertprobleme	116
8.1	Lineare Randwertaufgaben	116
8.2	Lineare Randwertaufgaben 2. Ordnung	118
8.3	Grundlösungen und Greensche Funktion	120
8.4	Sturm - Liouville'sche Eigenwertaufgaben	122
9	Näherungsverfahren	124
Teil II: Aufgaben		126
10	Aufgaben zu Gleichungen 1. Ordnung	126
10.1	Theoretisches	126
10.2	Qualitative Aussagen	134
10.3	Richtungsfelder, orthogonale Trajektorien	140
10.4	Trennung der Variablen	146
10.5	Lineare Gleichungen 1. Ordnung	157
10.6	Einfache Substitutionen	164
10.7	Riccati-Gleichungen	176
10.8	Implizite Gleichungen 1. Ordnung	183
10.9	Exakte Gleichungen und Euler Multiplikatoren	194

11 Aufgaben zu Systemen und Gleichungen höherer Ordnung	203
11.1 Theoretisches	203
11.2 Elementare Typen	210
11.3 Picardsches Iterationsverfahren	219
11.4 Potenzreihenansatz	226
11.5 Aufgaben zu autonomen Systemen	237
11.6 Aufgaben zur Stabilitätstheorie	245
12 Aufgaben zu linearen Problemen	256
12.1 Theoretisches	256
12.2 Lineare Systeme	263
12.3 Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten	270
12.4 Lineare Differentialgleichungen	278
12.5 Lineare Gleichungen mit konstanten Koeffizienten	288
12.6 Aufgaben zur Laplace-Transformation	297
12.7 Randwertprobleme	305
12.8 Eigenwertprobleme	309
Literaturverzeichnis	313
Symbolverzeichnis	314
Abkürzungen	314
Index	315