

Inhaltsverzeichnis

<i>Einführung</i>	17
Zu diesem Buch	17
Konventionen in diesem Buch	17
Törichte Annahmen über den Leser	17
Wie dieses Buch aufgebaut ist	18
Teil I: Zu den Grundlagen der linearen Algebra	18
Teil II: Alles, was mit Vektoren zu tun hat	18
Teil III: Lineare Gleichungssysteme lösen	19
Teil IV: Rund um die analytische Geometrie	19
Teil V: Matrizenrechnung und Determinanten beherrschen	19
Teil VI: Lineare Abbildungen und Basiswechsel behandeln	19
Teil VII: Eigenwerte bestimmen und Diagonalisieren	19
Teil VIII: Top Ten Teil	20
Symbole in diesem Buch	20
Wie es weitergeht	20
 <i>Teil I</i>	
<i>Zu den Grundlagen der linearen Algebra</i>	21
 <i>Kapitel 1</i>	
<i>Schnelleinstieg in die lineare Algebra</i>	23
Was die Algebra linear macht	23
Einfache Probleme angehen	25
Auflösen von linearen Gleichungen	26
Von Gleichungen zu Gleichungssystemen	27
Lösungen der Aufgaben zum Schnelleinstieg in die lineare Algebra	29
 <i>Kapitel 2</i>	
<i>Rechnen mit komplexen Zahlen</i>	34
Konjugiert komplexe Zahlen ermitteln	34
Addition und Subtraktion komplexer Zahlen	36
Multiplikation komplexer Zahlen	37
Division von komplexen Zahlen	38
Beträge komplexer Zahlen bestimmen	39
Lösungen der Aufgaben zu den komplexen Zahlen	41

Kapitel 3**Körpergesetze für sich ausnutzen****44**

Überprüfen von Körpergesetzen	44
Elementare Termumformungen anwenden	48
Der Körper der rationalen Zahlen	49
Der Körper der komplexen Zahlen	51
Lösungen der Aufgaben zu den Körpergesetzen	52

Teil II**Alles, was mit Vektoren zu tun hat****59****Kapitel 4****Vektoroperationen leicht gemacht****61**

Ganz einfache Vektoroperationen	61
Addition von Vektoren	62
Skalare Multiplikation von Vektoren	63
Das Skalarprodukt von Vektoren	64
Die Norm eines Vektors	65
Jetzt wird es schwieriger: das Kreuzprodukt	67
Winkel zwischen Vektoren	69
Technische Anwendungsaufgaben	71
Lösungen der Aufgaben der Vektoroperationen	73

Kapitel 5**Vektorräume mit Aussicht****79**

Allgemeingültige Vektorraumeigenschaften	79
Polynome als Vektoren	81
Vektorräume aus Matrizen	82
Eigenschaften von Vektorräumen mit Skalarprodukt	84
Nicht schwindlig werden: Vektorräume aus linearen Abbildungen	86
Lösungen der Aufgaben zu den Vektorräumen	87

Kapitel 6**Aufräumen in den Unterräumen****95**

Vektorraumeigenschaften von Unterräumen überprüfen	95
Unterräume bestimmen, leicht gemacht	97
Summen und direkte Summen von Unterräumen	99
Ausnutzen von Dimensionen	102
Lösungen der Aufgaben zu den Unterräumen	103

Kapitel 7

Basis und Dimension

113

Linearkombinationen finden	113
Basisvektoren von Vektorräumen ermitteln	115
Lineare Unabhängigkeit von Basisvektoren untersuchen	117
Erzeugendensysteme für Vektorräume finden	119
Lösungen der Aufgaben zu Basis und Dimension	122

Teil III

Lineare Gleichungssysteme lösen

133

Kapitel 8

Homogene lineare Gleichungssysteme

135

Triviale Lösungen	135
Den Lösungsraum erweitern	136
Das Gauß'sche Eliminationsverfahren	137
Erweiterungen zum Gauß-Jordan-Algorithmus	141
Unterbestimmte Systeme und lineare Abhängigkeit	143
Lösungen der Aufgaben zu homogenen LGS	145

Kapitel 9

Inhomogene lineare Gleichungssysteme

154

Ein LGS in eine Matrizengleichung überführen	154
Inverse Matrizen zur Lösung der Matrizengleichung	156
Bestimmung eines LGS über die erweiterte Koeffizientenmatrix	157
Paradox: inkonsistente Systeme	159
Die Cramer'sche Regel	161
Lösungen der Aufgaben zu inhomogenen LGS	163

Kapitel 10

Parametrisierte LGS lösen

172

Einfache parametrisierte LGS	172
Kniffligere Ausgangssituationen	175
Lösungen der Aufgaben zu parametrisierten LGS	179

Teil IV**Rund um die analytische Geometrie****191****Kapitel 11****Geometrische Grundelemente beherrschen****193**

Geradenformen ermitteln	193
Die Gleichungsform	195
Darstellungsmöglichkeiten von Ebenen erkennen	196
Die Parameterform	197
Die Normalenform	198
Die Koordinatenform und die Achsenabschnittsform	201
Lösungen der Aufgaben zu den geometrischen Grundelementen	202

Kapitel 12**Abstände berechnen und Objekte schneiden****211**

Punkte im Fokus	211
Abstand von einem Punkt zu einer Ebene	213
Geraden untersuchen	214
Abstände paralleler Geraden berechnen	215
Abstände windschiefer Geraden ermitteln	216
Schnittpunkt und -winkel zweier Geraden herausfinden	218
Ebenen im Blick	220
Abstand einer Gerade zu einer parallelen Ebene	220
Schnittpunkt und -winkel von Gerade zu Ebene	220
Abstand zweier paralleler Ebenen	222
Schnittgerade und -winkel zwischen Ebenen	223
Lösungen der Aufgaben zu Abständen und Schnittobjekten	223

Kapitel 13**Geometrische Transformationen****232**

Aufgaben zu affinen Abbildungen	232
Ausführen der Translation	233
Die Rotation als affine Abbildung	234
Spiegelungen leicht gemacht	235
Berechnen der Kontraktion	236
Die Hauptachsentransformation	237
Lösungen der Aufgaben zu den geometrischen Transformationen	240

Teil V

Matrizenrechnung und Determinanten beherrschen **247**

Kapitel 14

Fit im Rechnen mit Matrizen **249**

Addition von Matrizen durchführen	249
Skalare Multiplikation von Matrizen lernen	251
Matrix-Vektorprodukt einsetzen	252
Matrixmultiplikation üben	253
Transposition von Matrizen leicht gemacht	256
Adjungierte von Matrizen bestimmen	257
Komplementäre Matrizen erzeugen	258
Lösungen der Aufgaben zum Rechnen mit Matrizen	262

Kapitel 15

Matrizen invertieren **270**

2×2 Matrizen schnell invertieren	270
Die Inverse von 3×3 -Matrizen bestimmen	272
Inverse von höherdimensionalen Matrizen erzeugen	274
Lösungen der Aufgaben zum Invertieren von Matrizen	278

Kapitel 16

Determinanten bestimmen **286**

Berechnung von Determinanten	286
für 2×2 -Matrizen	287
mit der Regel von Sarrus	288
Allgemeine Determinanten entwickeln	290
Rechenregeln für Determinanten einsetzen	293
Lösungen der Aufgaben zu Determinanten	294

Kapitel 17

Eigenschaften von Matrizen erforschen **300**

Sind diese Matrizen regulär?	300
Idempotente und nilpotente Matrizen erkennen	302
Eigenschaften hermitescher und schiefhermitescher Matrizen	304
Die Spur einer Matrix	306
Matrizen auf Ähnlichkeit untersuchen	307
Lösungen der Aufgaben zu den Eigenschaften von Matrizen	309

Teil VI

Lineare Abbildungen und Basiswechsel

313

Kapitel 18

Umgang mit linearen Abbildungen pflegen

315

Homomorphismen und Artverwandte	315
Bilder und Urbilder von Vektoren berechnen	316
Matrixdarstellungen linearer Abbildungen finden	318
Angabe von linearen Abbildungsvorschriften anhand der Matrixdarstellung	320
Kern und Bild von Vektorraumhomomorphismen ermitteln	322
Lösungen der Aufgaben zum Umgang mit linearen Abbildungen	323

Kapitel 19

Mit Linearkombinationen und Koordinaten rechnen

329

Koeffizienten von Linearkombinationen ermitteln	329
Koordinaten in Abhängigkeit der jeweiligen Basen betrachten	330
Konkrete Probleme mittels Koordinatenvektoren spielend lösen	332
Lösungen der Aufgaben zu Linearkombinationen und Koordinaten	334

Kapitel 20

Basiswechsel von Homomorphismen

338

Die Übergangsmatrix angeben	338
Basiswechsel für Vektoren durchführen	341
Die Basis linearer Operatoren wechseln	343
Tipps und Tricks zum Basiswechsel bei allgemeinen Homomorphismen	345
Lösungen der Aufgaben zum Basiswechsel	348

Teil VII

Eigenwerte bestimmen und Diagonalisieren

355

Kapitel 21

Eigenwerte berechnen

357

Untersuchung auf Eigenwerte ...	357
von 2×2 Matrizen	358
von 3×3 Matrizen	359
von allgemeinen Matrizen	360
Eigenvektoren allgemein bestimmen	362
Bestimmung von Eigenwerten bei Dreiecksmatrizen	364
Lösungen der Aufgaben zum Berechnen von Eigenwerten	366

Kapitel 22**Anwendungen von Eigenwerten 375**

Potenzieren von Matrizen	375
Technische Fragestellungen lösen	378
Eigenwerte in Differenzialgleichungen	380
Lösungen der Aufgaben zu den Anwendungen von Eigenwerten	382

Kapitel 23**Das Spektrum des Spektralsatzes 389**

Die charakteristische Gleichung ansetzen	389
Den Satz von Cayley-Hamilton überprüfen	391
Den Spektralsatz nachweisen	392
Hauptachsentransformationen und der Spektralsatz	394
Lösungen der Aufgaben zum Spektralsatz	396

Teil VIII**Top Ten Teil 405****Kapitel 24****Zehn typische Fehler vermeiden 407**

Das Kreuzprodukt korrekt bestimmen	407
Lösungen unterschlagen verboten	408
Vorzeichen beim Entwicklungssatz beachten	408
Invertierung nur regulärer Matrizen	408
Typische Fehler im Gauß-Algorithmus vermeiden	409
Geometrische Überlegungen bei der Diagonalisierung anstellen	410
Peinliche Fehler bei der Probe umgehen	411
Invertierung von Matrizen überprüfen	411
Vektorkomponenten beim Basiswechsel vergleichen	411
Schnittobjekte einsetzen	412
Lösungen von Gleichungssystemen gegenchecken	412

Stichwortverzeichnis 413