

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	1
2 Grundlagen zum Lernen mit Darstellungen	7
2.1 Begriffliche Grundlage	7
2.1.1 Mathematische Zeichen und Symbole	8
2.1.2 Darstellungen	12
2.1.3 Anschauungsmittel	19
2.2 Lernen mit Darstellungen	20
2.2.1 Darstellungswechsel	21
2.2.2 Epistemologische Perspektive	26
2.2.3 Interaktionistische Perspektive	28
2.3 Zusammenfassung: Lerntheoretisches Verständnis der vorliegenden Arbeit	32
3 Zur Multiplikation in der Grundschule	35
3.1 Fachliche Einbettung	36
3.1.1 Zur Multiplikation	36
3.1.2 Zum Distributivgesetz	38
3.1.3 Konsequenzen für die vorliegende Arbeit	41
3.2 Kennzeichen eines tragfähigen Operationsverständnisses zur Multiplikation	42
3.2.1 Das wesentliche Kennzeichen: Unitizing	45
3.2.2 Bedeutungsvolle und flexible Interpretation der Faktoren	48
3.2.3 Operative Beziehungen: Fokus Distributivität	51

3.2.4	Grundvorstellung und mentale Repräsentation	56
3.2.5	Der Darstellungswechsel	60
3.2.6	Konsequenzen für die vorliegende Arbeit	66
3.3	Fachdidaktische Einbettung	67
3.3.1	Das ganzheitliche Konzept und die besondere Rolle des Distributivgesetzes	70
3.3.2	Anschauungsmittel zur Deutung multiplikativer Strukturen	75
3.3.3	Die Rechtecksdarstellung als ein besonderes Anschauungsmittel	80
3.3.4	Konsequenzen für die vorliegende Arbeit	86
3.4	Distributive Zusammenhänge im Kontext epistemologischer Deutungsprozesse	86
4	Zum Verallgemeinern	89
4.1	Grundlegendes zum Verallgemeinern	90
4.1.1	Verallgemeinern als kognitiver Prozess	91
4.1.2	Verallgemeinern als kommunikativer Prozess	97
4.2	Verallgemeinern im Kontext der Algebra	102
4.3	Verallgemeinern in der Grundschule	105
4.4	Der Gebrauch von Ressourcen beim Verallgemeinern	108
4.4.1	Mathematische Symbole	109
4.4.2	Anschauungsmittel	113
4.4.3	Sprache	116
4.4.4	Der multimodale Gebrauch von Ressourcen	129
4.4.5	Konsequenzen für die vorliegende Arbeit	141
4.5	Verallgemeinern distributiver Zusammenhänge im Kontext epistemologischer Deutungsprozesse	142
5	Forschungsfragen und Forschungsdesign	147
5.1	Forschungsziel und Forschungsfragen	147
5.2	Qualitativer Zugang	152
5.3	Zu den Methoden der Datenerhebung	153
5.3.1	Das qualitative Interview	153
5.3.2	Das klinische Interview als eine Variante des qualitativen Interviews	156
5.3.3	Durchführung der Datenerhebung: Interviewleitfaden	162

5.3.4	Durchführung der Datenerhebung: Rahmenbedingungen	167
5.3.5	Sprachstandsdiagnostik: Begründung und Durchführung	169
5.3.6	Beschreibung der Stichprobe	171
5.4	Zu den Methoden der Datenauswertung	175
5.4.1	Interpretative Unterrichtsforschung	176
5.4.2	Das epistemologische Dreieck	187
5.4.3	Anpassung des epistemologischen Dreiecks	191
5.4.4	Begründung und konkrete Umsetzung	194
6	Empirische Ergebnisse: Verallgemeinern als kognitiver Prozess ...	207
6.1	Verallgemeinern als das Erfassen von Gemeinsamkeiten	210
6.1.1	Prototypische Beispiele	213
6.1.2	Zusammenfassung zu den Referenzkontexten	249
6.1.3	Zusammenfassung zu den begrifflichen Deutungen	260
6.2	Verallgemeinern als das Ausweiten der Struktur	271
6.2.1	Prototypische Beispiele	272
6.2.2	Zusammenfassung zum Ausweiten	288
6.3	Zusammenschau: Verallgemeinern als kognitiver Prozess	293
6.3.1	Vergleich der Verallgemeinerungstätigkeiten	293
6.3.2	Zusammenfassung zum ersten Forschungsschwerpunkt	295
7	Empirische Ergebnisse: Verallgemeinern als kommunikativer Prozess	299
7.1	Typ 1: Sprache allein	304
7.1.1	Prototypische Beispiele	305
7.1.2	Zusammenfassung: Sprache allein	313
7.2	Typ 2: Analoges Zusammenspiel	315
7.2.1	Prototypische Beispiele	315
7.2.2	Zusammenfassung: analoges Zusammenspiel	323
7.3	Typ 3: Kooperatives Zusammenspiel	324
7.3.1	Prototypische Beispiele	324
7.3.2	Zusammenfassung: kooperatives Zusammenspiel	332
7.4	Typ 4: Subsidäres Zusammenspiel	335
7.4.1	Prototypische Beispiele	335
7.4.2	Zusammenfassung: Subsidäres Zusammenspiel	342

7.5	Mischtypen	344
7.5.1	Prototypisches Beispiel	344
7.5.2	Zusammenfassung: Mischtypen	347
7.6	Zusammenfassung: Verallgemeinern als kommunikativer Prozess	347
7.7	Weitere Erkenntnisse im Hinblick auf didaktische Konsequenzen	354
8	Fazit	359
8.1	Forschungsergebnisse	359
8.1.1	Beantwortung der Forschungsfragen	359
8.1.2	Übergreifende Einsichten	364
8.2	Folgerungen für die mathematikdidaktische Forschung	367
8.3	Folgerungen für die Unterrichtspraxis	372
8.4	Schlussbemerkung	378
	Literaturverzeichnis	381