

<b>I Vektoranalysis</b>	1
<b>1 Ebene und räumliche Kurven</b>	1
1.1 Vektorielle Darstellung einer Kurve	1
1.2 Differentiation eines Vektors nach einem Parameter	4
1.2.1 Ableitung eines Vektors	4
1.2.2 Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor eines Massenpunktes	9
1.3 Bogenlänge einer Kurve	12
1.4 Tangenten- und Hauptnormaleneinheitsvektor	16
1.5 Krümmung einer Kurve	21
1.6 Ein Anwendungsbeispiel: Zerlegung von Geschwindigkeit und Beschleunigung in Tangential- und Normalkomponenten	27
<b>2 Flächen im Raum</b>	31
2.1 Vektorielle Darstellung einer Fläche	31
2.2 Flächenkurven	35
2.3 Tangentialebene, Flächennormale, Flächenelement	37
2.4 Flächen vom Typ $z = f(x; y)$	43
<b>3 Skalar- und Vektorfelder</b>	47
3.1 Ein einführendes Beispiel	47
3.2 Skalarfelder	50
3.3 Vektorfelder	52
3.4 Spezielle Vektorfelder aus Physik und Technik	55
3.4.1 Homogenes Vektorfeld	55
3.4.2 Kugel- oder radialsymmetrisches Vektorfeld (Zentralfeld)	56
3.4.3 Zylinder- oder axialsymmetrisches Vektorfeld	58
3.4.4 Zusammenstellung der behandelten Vektorfelder	59
<b>4 Gradient eines Skalarfeldes</b>	60
4.1 Definition und Eigenschaften des Gradienten	60
4.2 Richtungsableitung	64
4.3 Flächen vom Typ $F(x; y; z) = 0$	66
4.4 Ein Anwendungsbeispiel: Elektrisches Feld einer Punktladung	68
<b>5 Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes</b>	70
5.1 Divergenz eines Vektorfeldes	70
5.1.1 Ein einführendes Beispiel	70
5.1.2 Definition und Eigenschaften der Divergenz	74
5.1.3 Ein Anwendungsbeispiel: Elektrisches Feld eines homogen geladenen Zylinders	77

5.2	Rotation eines Vektorfeldes .....	79
5.2.1	Definition und Eigenschaften der Rotation .....	79
5.2.2	Ein Anwendungsbeispiel: Geschwindigkeitsfeld einer rotierenden Scheibe .....	83
5.3	Spezielle Vektorfelder .....	85
5.3.1	Quellenfreies Vektorfeld .....	85
5.3.2	Wirbelfreies Vektorfeld .....	87
5.3.3	Laplace- und Poisson-Gleichung .....	89
5.3.4	Ein Anwendungsbeispiel: Potentialgleichung des elektrischen Feldes ..	93
<b>6</b>	<b>Spezielle ebene und räumliche Koordinatensysteme .....</b>	<b>94</b>
6.1	Polarkoordinaten .....	94
6.1.1	Definition und Eigenschaften der Polarkoordinaten .....	94
6.1.2	Darstellung eines Vektors in Polarkoordinaten .....	95
6.1.3	Darstellung von Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace-Operator in Polarkoordinaten .....	101
6.1.4	Ein Anwendungsbeispiel: Geschwindigkeitsvektor bei einer gleichförmigen Kreisbewegung .....	105
6.2	Zylinderkoordinaten .....	107
6.2.1	Definition und Eigenschaften der Zylinderkoordinaten .....	107
6.2.2	Darstellung eines Vektors in Zylinderkoordinaten .....	111
6.2.3	Darstellung von Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten .....	116
6.2.4	Zylindersymmetrische Vektorfelder .....	119
6.2.5	Ein Anwendungsbeispiel: Geschwindigkeitsvektor eines Massen- punktes in Zylinderkoordinaten .....	121
6.3	Kugelkoordinaten .....	124
6.3.1	Definition und Eigenschaften der Kugelkoordinaten .....	124
6.3.2	Darstellung eines Vektors in Kugelkoordinaten .....	129
6.3.3	Darstellung von Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace-Operator in Kugelkoordinaten .....	135
6.3.4	Kugel- oder radialsymmetrische Vektorfelder (Zentralfelder) .....	137
6.3.5	Ein Anwendungsbeispiel: Potential und elektrische Feldstärke in der Umgebung einer homogen geladenen Kugel .....	140
<b>7</b>	<b>Linien- oder Kurvenintegrale .....</b>	<b>143</b>
7.1	Ein einführendes Beispiel .....	143
7.2	Definition eines Linien- oder Kurvenintegrals .....	146
7.3	Berechnung eines Linien- oder Kurvenintegrals .....	148
7.4	Wegunabhängigkeit eines Linien- oder Kurvenintegrals. Konservative Vektorfelder .....	152
7.5	Anwendungsbeispiele aus Physik und Technik .....	163
7.5.1	Kugel- oder radialsymmetrische Vektorfelder (Zentralfelder) .....	163
7.5.2	Magnetfeld eines stromdurchflossenen linearen Leiters .....	164
7.5.3	Elektrisches Feld in der Umgebung eines homogen geladenen Drahtes .....	165
7.6	Arbeitsintegral .....	167
7.6.1	Arbeit eines Kraftfeldes .....	167
7.6.2	Ein Anwendungsbeispiel: Elektronen im Magnetfeld .....	168

<b>8 Oberflächenintegrale</b>	170
8.1 Ein einführendes Beispiel	170
8.2 Definition eines Oberflächenintegrals	175
8.3 Berechnung eines Oberflächenintegrals	177
8.3.1 Oberflächenintegral in speziellen (symmetriegerechten) Koordinaten	178
8.3.2 Oberflächenintegral in Flächenparametern	190
8.4 Anwendungsbeispiele aus Physik und Technik	195
8.4.1 Fluss eines homogenen Vektorfeldes durch die Oberfläche eines Würfels	195
8.4.2 Fluss eines zylinder- oder axialsymmetrischen Vektorfeldes durch die Oberfläche eines Zylinders	199
8.4.3 Fluss eines kugel- oder radialsymmetrischen Vektorfeldes durch die Oberfläche einer Kugel	202
<b>9 Integralsätze von Gauß und Stokes</b>	205
9.1 Gaußscher Integralsatz	205
9.1.1 Ein einführendes Beispiel	205
9.1.2 Gaußscher Integralsatz im Raum	207
9.1.3 Gaußscher Integralsatz in der Ebene	211
9.2 Stokesscher Integralsatz	214
9.3 Anwendungsbeispiele aus Physik und Technik	222
9.3.1 Elektrisches Feld eines homogen geladenen Zylinders	222
9.3.2 Magnetfeld eines stromdurchflossenen linearen Leiters	227
<b>Übungsaufgaben</b>	230
Zu Abschnitt 1	230
Zu Abschnitt 2	232
Zu Abschnitt 3	234
Zu Abschnitt 4	236
Zu Abschnitt 5	237
Zu Abschnitt 6	239
Zu Abschnitt 7	242
Zu Abschnitt 8	245
Zu Abschnitt 9	248

## II Wahrscheinlichkeitsrechnung 251

<b>1 Hilfsmittel aus der Kombinatorik</b>	251
1.1 Urnenmodell	251
1.2 Permutationen	252
1.3 Kombinationen	255
1.4 Variationen	260
1.5 Tabellarische Zusammenstellung der wichtigsten Formeln	264
<b>2 Grundbegriffe</b>	264
2.1 Einführende Beispiele	264
2.2 Zufallsexperimente	268

2.3 Elementarereignisse und Ergebnismenge eines Zufallsexperiments .....	269
2.4 Ereignisse und Ereignisraum .....	270
2.5 Verknüpfungen von Ereignissen .....	273
<b>3 Wahrscheinlichkeit .....</b>	<b>276</b>
3.1 Laplace-Experimente .....	276
3.2 Wahrscheinlichkeitsaxiome .....	281
3.2.1 Eigenschaften der relativen Häufigkeiten .....	281
3.2.2 Wahrscheinlichkeitsaxiome von Kolmogoroff .....	284
3.2.3 Festlegung unbekannter Wahrscheinlichkeiten in der Praxis („statistische“ Definition der Wahrscheinlichkeit) .....	286
3.2.4 Wahrscheinlichkeitsraum .....	287
3.3 Additionssatz für beliebige Ereignisse .....	290
3.4 Bedingte Wahrscheinlichkeit .....	292
3.5 Multiplikationssatz .....	295
3.6 Stochastisch unabhängige Ereignisse .....	299
3.7 Ereignisbäume .....	302
3.8 Totale Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses und Bayessche Formel .....	308
<b>4 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen .....</b>	<b>315</b>
4.1 Zufallsvariable oder Zufallsgrößen .....	315
4.1.1 Einführende Beispiele .....	315
4.1.2 Definition einer Zufallsvariablen .....	317
4.2 Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen .....	318
4.3 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten Zufallsvariablen (diskrete Verteilung) .....	319
4.4 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer stetigen Zufallsvariablen (stetige Verteilung) .....	327
<b>5 Kennwerte oder Maßzahlen einer Wahrscheinlichkeitsverteilung .....</b>	<b>335</b>
5.1 Erwartungswert einer Zufallsvariablen .....	336
5.1.1 Ein einführendes Beispiel .....	336
5.1.2 Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariablen .....	336
5.1.3 Erwartungswert einer stetigen Zufallsvariablen .....	337
5.2 Erwartungswert einer Funktion .....	339
5.3 Mittelwert, Varianz und Standardabweichung einer diskreten Zufalls- variablen .....	340
5.4 Mittelwert, Varianz und Standardabweichung einer stetigen Zufalls- variablen .....	344
5.5 Mittelwert und Varianz einer linearen Funktion .....	348
<b>6 Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen .....</b>	<b>350</b>
6.1 Binomialverteilung .....	350
6.2 Hypergeometrische Verteilung .....	361
6.3 Poisson-Verteilung .....	367

6.4	Gaußsche Normalverteilung .....	371
6.4.1	Allgemeine Normalverteilung .....	371
6.4.2	Standardnormalverteilung .....	374
6.4.3	Erläuterungen zur tabellierten Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung .....	376
6.4.4	Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der tabellierten Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung .....	378
6.4.5	Quantile der Standardnormalverteilung .....	388
6.5	Exponentialverteilung .....	390
6.6	Weibull-Verteilung .....	393
6.7	Zusammenhang zwischen der Binomialverteilung und der Gaußschen Normalverteilung .....	396
6.8	Approximation einer diskreten Verteilung durch eine andere Verteilung, insbesondere durch die Normalverteilung .....	404
<b>7</b>	<b>Wahrscheinlichkeitsverteilungen von mehreren Zufallsvariablen .....</b>	<b>406</b>
7.1	Ein einführendes Beispiel .....	406
7.2	Zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilungen .....	409
7.2.1	Verteilungsfunktion einer zweidimensionalen Zufallsvariablen .....	409
7.2.2	Diskrete zweidimensionale Verteilung .....	411
7.2.3	Stetige zweidimensionale Verteilung .....	414
7.3	Stochastisch unabhängige Zufallsvariable .....	420
7.4	Funktionen von mehreren Zufallsvariablen .....	426
7.5	Summen und Produkte von Zufallsvariablen .....	428
7.5.1	Additionssatz für Mittelwerte .....	428
7.5.2	Multiplikationssatz für Mittelwerte .....	430
7.5.3	Additionssatz für Varianzen .....	433
7.5.4	Eigenschaften einer Summe von stochastisch unabhängigen und normalverteilten Zufallsvariablen .....	436
7.6	Über die große Bedeutung der Gaußschen Normalverteilung in den Anwendungen .....	439
7.6.1	Zentraler Grenzwertsatz .....	439
7.6.2	Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Summe von Zufallsvariablen .....	441
7.6.3	Grenzwertsatz von Moivre-Laplace .....	443
<b>8</b>	<b>Prüf- oder Testverteilungen .....</b>	<b>444</b>
8.1	Chi-Quadrat-Verteilung .....	444
8.2	$t$ -Verteilung von Student .....	449
	<b>Übungsaufgaben .....</b>	<b>454</b>
	Zu Abschnitt 1 .....	454
	Zu Abschnitt 2 .....	456
	Zu Abschnitt 3 .....	457
	Zu Abschnitt 4 .....	460
	Zu Abschnitt 5 .....	462
	Zu Abschnitt 6 .....	465
	Zu Abschnitt 7 .....	470

<b>III Grundlagen der mathematischen Statistik</b> .....	475
<b>1 Grundbegriffe</b> .....	475
1.1 Ein einführendes Beispiel .....	475
1.2 Zufallsstichproben aus einer Grundgesamtheit .....	476
1.3 Häufigkeitsverteilung einer Stichprobe .....	478
1.3.1 Häufigkeitsfunktion einer Stichprobe .....	478
1.3.2 Verteilungsfunktion einer Stichprobe .....	481
1.3.3 Gruppierung der Stichprobenwerte bei umfangreichen Stichproben (Einteilung in Klassen) .....	483
<b>2 Kennwerte oder Maßzahlen einer Stichprobe</b> .....	489
2.1 Mittelwert, Varianz und Standardabweichung einer Stichprobe .....	490
2.2 Spezielle Berechnungsformeln für die Kennwerte einer Stichprobe .....	493
2.2.1 Berechnung der Kennwerte unter Verwendung der Häufigkeits- funktion .....	493
2.2.2 Berechnung der Kennwerte einer gruppierten Stichprobe .....	495
<b>3 Statistische Schätzmethoden für die unbekannten Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Parameterschätzungen“)</b> .....	497
3.1 Aufgaben der Parameterschätzung .....	497
3.2 Schätzfunktionen und Schätzwerte für die unbekannten Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Punktschätzungen“) .....	498
3.2.1 Ein einführendes Beispiel .....	499
3.2.2 Schätz- und Stichprobenfunktionen .....	499
3.2.3 Schätzungen für den Mittelwert $\mu$ .....	502
3.2.4 Schätzungen für die Varianz $\sigma^2$ .....	503
3.2.5 Schätzungen für einen Anteilswert $p$ (Parameter $p$ einer Binomial- verteilung) .....	504
3.2.6 Tabellarische Zusammenstellung der wichtigsten Schätzfunktionen und ihrer Schätzwerte .....	504
3.3 Ein Verfahren zur Gewinnung von Schätzfunktionen .....	507
3.3.1 Maximum-Likelihood-Methode .....	508
3.3.2 Anwendungen auf spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen .....	510
3.3.2.1 Binomialverteilung .....	510
3.3.2.2 Poisson-Verteilung .....	512
3.3.2.3 Gaußsche Normalverteilung .....	515
3.4 Vertrauens- oder Konfidenzintervalle für die unbekannten Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Intervallschätzungen“) .....	518
3.4.1 Vertrauens- oder Konfidenzintervalle und statistische Sicherheit .....	518
3.4.2 Vertrauensintervalle für den unbekannten Mittelwert $\mu$ einer Normal- verteilung bei bekannter Varianz $\sigma^2$ .....	522
3.4.3 Vertrauensintervalle für den unbekannten Mittelwert $\mu$ einer Normal- verteilung bei unbekannter Varianz $\sigma^2$ .....	529
3.4.4 Vertrauensintervalle für die unbekannte Varianz $\sigma^2$ einer Normal- verteilung .....	534

3.4.5	Vertrauensintervalle für einen unbekannten Anteilswert $p$ (Parameter $p$ einer Binomialverteilung) . . . . .	538
3.4.6	Vertrauensintervalle für den unbekannten Mittelwert $\mu$ einer beliebigen Verteilung . . . . .	543
<b>4</b>	<b>Statistische Prüfverfahren für die unbekannten Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Parametertests“)</b> . . . . .	<b>544</b>
4.1	Ein einführendes Beispiel . . . . .	544
4.2	Statistische Hypothesen und Parametertests . . . . .	548
4.3	Planung und Durchführung eines Parametertests . . . . .	549
4.4	Mögliche Fehlerquellen bei einem Parametertest . . . . .	554
4.5	Spezielle Parametertests . . . . .	559
4.5.1	Tests für den unbekannten Mittelwert $\mu$ einer Normalverteilung bei bekannter Varianz $\sigma^2$ . . . . .	559
4.5.2	Tests für den unbekannten Mittelwert $\mu$ einer Normalverteilung bei unbekannter Varianz $\sigma^2$ . . . . .	568
4.5.3	Tests für die Gleichheit der unbekannten Mittelwerte $\mu_1$ und $\mu_2$ zweier Normalverteilungen (Differenzentests) . . . . .	573
4.5.3.1	Abhängige und unabhängige Stichproben . . . . .	573
4.5.3.2	Differenzentests bei abhängigen Stichproben . . . . .	575
4.5.3.3	Differenzentests bei unabhängigen Stichproben . . . . .	580
4.5.4	Tests für die unbekannte Varianz $\sigma^2$ einer Normalverteilung . . . . .	592
4.5.5	Tests für einen unbekannten Anteilswert $p$ (Parameter $p$ einer Binomialverteilung) . . . . .	597
4.6	Ein Anwendungsbeispiel: Statistische Qualitätskontrolle unter Verwendung von Kontrollkarten . . . . .	603
<b>5</b>	<b>Statistische Prüfverfahren für die unbekannte Verteilungsfunktion einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Anpassungs- oder Verteilungstests“)</b> . . . . .	<b>608</b>
5.1	Aufgaben eines Anpassungs- oder Verteilungstests . . . . .	608
5.2	Ein einführendes Beispiel . . . . .	609
5.3	Chi-Quadrat-Test („ $\chi^2$ -Test“) . . . . .	611
<b>6</b>	<b>Korrelation und Regression</b> . . . . .	<b>624</b>
6.1	Korrelation . . . . .	624
6.1.1	Korrelationskoeffizient einer zweidimensionalen Stichprobe . . . . .	624
6.1.2	Korrelationskoeffizient einer zweidimensionalen Grundgesamtheit . . . . .	634
6.2	Regression . . . . .	637
<b>Übungsaufgaben</b>	. . . . .	<b>643</b>
	Zu Abschnitt 1 . . . . .	643
	Zu Abschnitt 2 . . . . .	645
	Zu Abschnitt 3 . . . . .	646
	Zu Abschnitt 4 . . . . .	648
	Zu Abschnitt 5 . . . . .	651
	Zu Abschnitt 6 . . . . .	652

<b>IV Fehler- und Ausgleichsrechnung</b> .....	654
<b>1 „Fehlerarten“ (systematische und zufällige Messabweichungen).</b>	
Aufgaben der Fehler- und Ausgleichsrechnung .....	654
<b>2 Statistische Verteilung der Messwerte und Messabweichungen („Messfehler“)</b>	658
2.1 Häufigkeitsverteilungen .....	658
2.2 Normalverteilte Messgrößen .....	660
<b>3 Auswertung einer Messreihe</b> .....	666
3.1 Mittelwert und Standardabweichung .....	666
3.2 Vertrauensbereich für den Mittelwert $\mu$ , Messunsicherheit, Messergebnis ...	674
<b>4 „Fehlerfortpflanzung“ nach Gauß</b> .....	683
4.1 Ein einführendes Beispiel .....	683
4.2 Mittelwert einer „indirekten“ Messgröße .....	684
4.3 Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz (Varianzfortpflanzungsgesetz) .....	687
4.4 Messergebnis für eine „indirekte“ Messgröße .....	691
<b>5 Ausgleichs- oder Regressionskurven</b> .....	698
5.1 Ein einführendes Beispiel .....	698
5.2 Ausgleichung nach der „Gaußschen Methode der kleinsten Quadrate“ .....	700
5.3 Ausgleichs- oder Regressionsgerade .....	705
5.3.1 Bestimmung der Parameter einer Ausgleichsgeraden .....	705
5.3.2 Streuungsmaße und Unsicherheiten bei der Parameterbestimmung ...	713
5.4 Ausgleichs- oder Regressionsparabel .....	719
5.5 Nichtlineare Ausgleichsprobleme, die auf die lineare Regression zurück- führbar sind .....	723
<b>Übungsaufgaben</b> .....	734
Zu Abschnitt 3 .....	734
Zu Abschnitt 4 .....	736
Zu Abschnitt 5 .....	738



<b>Anhang</b> .....	743
<b>Teil A: Tabellen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik</b> .....	744
Tabelle 1: Verteilungsfunktion $\phi(u)$ der Standardnormalverteilung ....	744
Tabelle 2: Quantile der Standardnormalverteilung .....	746
Tabelle 3: Quantile der Chi-Quadrat-Verteilung .....	748
Tabelle 4: Quantile der $t$ -Verteilung von „Student“ .....	750
<b>Teil B: Lösungen der Übungsaufgaben</b> .....	753
<b>I Vektoranalysis</b> .....	754
Abschnitt 1 .....	754
Abschnitt 2 .....	757
Abschnitt 3 .....	761
Abschnitt 4 .....	764
Abschnitt 5 .....	767
Abschnitt 6 .....	773
Abschnitt 7 .....	781
Abschnitt 8 .....	787
Abschnitt 9 .....	794
<b>II Wahrscheinlichkeitsrechnung</b> .....	800
Abschnitt 1 .....	800
Abschnitt 2 .....	801
Abschnitt 3 .....	802
Abschnitt 4 .....	805
Abschnitt 5 .....	808
Abschnitt 6 .....	812
Abschnitt 7 .....	818
<b>III Grundlagen der mathematischen Statistik</b> .....	823
Abschnitt 1 .....	823
Abschnitt 2 .....	828
Abschnitt 3 .....	830
Abschnitt 4 .....	833
Abschnitt 5 .....	840
Abschnitt 6 .....	844
<b>IV Fehler- und Ausgleichsrechnung</b> .....	848
Abschnitt 3 .....	848
Abschnitt 4 .....	851
Abschnitt 5 .....	855
<b>Literaturhinweise</b> .....	863
<b>Sachwortverzeichnis</b> .....	864