

Inhaltsverzeichnis

1	Logik	1
1.1	Einordnung der Begriffe und deren Bedeutung	1
1.2	Aussagenlogik	4
1.2.1	Aussagen und Wahrheitswerte	4
1.2.2	Aussagenverknüpfungen	5
1.2.3	Logische Äquivalenzregeln	9
1.2.4	Logische Schlussregeln	11
1.3	Prädikatenlogik	14
1.3.1	Aussageformen, Variable und Prädikate	14
1.3.2	Quantoren und ihre Rechenregeln	15
1.4	Logische Formeln als Beschreibungssprache für beliebige Aussagen	22
1.4.1	Allgemeine Regeln zum Übersetzen von umgangssprachlichen Aussagen in prädikatenlogische Formeln	24
1.4.2	Anwendung der allgemeinen Regeln auf komplexe Sachverhalte	32
1.5	Übungsaufgaben	42
2	Mengenlehre	47
2.1	Grundlagen	47
2.1.1	Definition	47
2.1.2	Elementare Eigenschaften von Mengen	48
2.1.3	Darstellung von Mengen	49
2.1.4	Verknüpfungen von Mengen	52
2.2	Relationen	60
2.2.1	Besondere Eigenschaften von Relationen	61
2.2.2	Äquivalenzrelationen	62
2.2.3	Ordnungsrelationen	67
2.2.4	Graphische Darstellung von Relationen auf endlichen Mengen M	72
2.2.5	Verallgemeinerung des Relationsbegriffs für verschiedene Mengen	76
2.3	Funktionen	77
2.3.1	Komposition von Relationen und Funktionen	79
2.3.2	Inverse Relationen und Funktionen	81
2.3.3	Mächtigkeit von Mengen	84

2.4	Boolesche Algebren	88
2.4.1	Motivation aus Aussagenlogik und Mengenlehre	88
2.4.2	Formale Definition von Booleschen Algebren	91
2.4.3	Beispiele für Boolesche Algebren: Schaltfunktionen-Algebra und Teiler-Algebra	93
2.5	Übungsaufgaben	96
3	Beweisverfahren	107
3.1	Grundbegriffe der Mathematik	107
3.1.1	Definition	107
3.1.2	Aussagen: Satz, Lemma, Korollar	108
3.1.3	Beweis	109
3.1.4	Axiom	110
3.1.5	Das Axiomensystem von Peano für die natürlichen Zahlen	112
3.2	Vollständige Induktion	115
3.2.1	Grundprinzip	115
3.2.2	Verallgemeinertes Grundprinzip	118
3.2.3	Anwendung auf induktive Definitionen	120
3.2.4	Anwendung auf allgemeine rekursive Definitionen	122
3.3	Allgemeine Beweisstrategien	126
3.3.1	Direkter Beweis	126
3.3.2	Beweis durch Kontraposition	127
3.3.3	Indirekter Beweis	128
3.3.4	Beweise von Äquivalenzaussagen	129
3.3.5	Beweise durch Fallunterscheidung	130
3.3.6	Abzählbeweise	131
3.4	Übungsaufgaben	133
4	Zahlentheorie	139
4.1	Teilbarkeit	139
4.1.1	Definition und elementare Eigenschaften	139
4.1.2	Größenbeschränkungen für Teiler und Vielfache	141
4.1.3	Zahlendarstellungen mit Hilfe von Zahlenbasen und davon abhängige Teilbarkeitsregeln	142
4.1.4	Größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Viel- faches	147
4.2	Division mit Rest	151
4.2.1	Definition und Beispiele	151
4.2.2	Euklidischer Algorithmus	154
4.3	Primzahlen	158
4.3.1	Bedeutung und Bestimmung von Primzahlen	158
4.3.2	Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie und Anwendungen	162

4.4	Modulare Arithmetik	166
4.4.1	Modulare Kongruenz	166
4.4.2	Rechnen mit Restklassen	169
4.5	Übungsaufgaben	174
5	Algebraische Strukturen	179
5.1	Gruppen	179
5.1.1	Beispiele für unendliche Gruppen	180
5.1.2	Beispiele für endliche Gruppen	183
5.1.3	Gruppenisomorphie und ihre Invarianten	190
5.2	Körper	198
5.2.1	Beispiele für unendliche Körper und Ringe	201
5.2.2	Endliche Körper	203
5.2.3	Polynome über endlichen Körpern	207
5.2.4	Anleitung für die Konstruktion aller endlichen Körper	218
5.3	Anwendung endlicher Körper in Codierung und Kryptographie	222
5.4	Übungsaufgaben	223
6	Kombinatorik	231
6.1	Zählformeln für endliche Mengen	231
6.1.1	Disjunkte Vereinigungen und Mengenprodukte	231
6.1.2	Permutationen	233
6.1.3	Inklusion und Exklusion bei beliebigen Vereinigungen	235
6.1.4	Anzahl von Teilmengen	237
6.1.5	Rechnen mit Binomialkoeffizienten	240
6.2	Eigenschaften von Permutationen	242
6.2.1	Die verschiedenen Darstellungsarten von Permutationen	242
6.2.2	Komposition von Permutationen	245
6.2.3	Transpositionen	247
6.2.4	Zusammenhang zwischen Kombinatorik, Geometrie und Gruppentheorie	250
6.3	Übungsaufgaben	253
7	Graphentheorie	257
7.1	Terminologie und Repräsentation von Graphen	257
7.1.1	Isomorphie von Graphen	259
7.1.2	Weitere elementare Begriffe der Graphentheorie	262
7.1.3	Darstellung von Graphen im Computer	267
7.2	Wege in Graphen	271
7.2.1	Eulerwege und Hamiltonwege	272
7.2.2	Kürzeste Wege in bewerteten Graphen	278
7.3	Bäume und Wälder	286
7.3.1	Aufspannende Bäume oder Gerüste	287

7.3.2	Wurzelbäume	294
7.4	Planare Graphen	296
7.4.1	Ebene Darstellungen eines planaren Graphen und ihre Gebiete	296
7.4.2	Kombinatorische Charakterisierung von planaren Graphen .	300
7.5	Färbungen von Graphen	305
7.5.1	Das Vierfarbenproblem als Motivation	305
7.5.2	Eckenfärbungen	306
7.5.3	Andere Färbungen	310
7.6	Übungsaufgaben	316
Literaturverzeichnis		321
Symbolverzeichnis		323
Index		327