

Inhaltsverzeichnis

Teil I Grundlagen der Analysis

1	Logik und Mengenlehre	3
1.1	Logik	3
1.2	Mengenlehre	7
1.3	Abbildungen	11
1.4	Relationen	14
1.4.1	Äquivalenzrelationen	15
1.4.2	Ordnungsrelationen	17
	Aufgaben	21
2	Reelle Zahlen	23
2.1	Der Erweiterungsbedarf der rationalen Zahlen	23
2.2	Die Axiome der reellen Zahlen	30
2.2.1	Die algebraischen Axiome	31
2.2.2	Die Anordnungsaxiome	35
2.2.3	Das Vollständigkeitsaxiom	39
2.2.4	Eindeutigkeit	40
2.3	Natürliche, ganze und rationale Zahlen	41
2.3.1	Natürliche Zahlen	41
2.3.2	Ganze Zahlen	47
2.3.3	Rationale Zahlen	50
2.4	Intervallschachtelung	51
2.5	Mächtigkeit	56
2.5.1	Endliche Mengen	57
2.5.2	Abzählbare Mengen	59
2.5.3	Überabzählbare Mengen	62
	Aufgaben	67
3	Reelle Folgen und Reihen	71
3.1	Grenzwerte reeller Folgen	71
3.2	Das Rechnen mit reellen Folgen	74

3.3	Konvergenzkriterien	78
3.3.1	Monotone Folgen	78
3.3.2	Teilfolgen und Häufungswerte	89
3.3.3	Cauchyfolgen	92
3.4	Reihen	95
3.4.1	Konvergenz	97
3.4.2	Absolute Konvergenz und Umordnung	100
3.4.3	Konvergenzkriterien	104
3.4.4	Dezimalbruchentwicklungen	111
3.4.5	Potenzreihen	114
3.4.6	Doppelreihen	120
3.4.7	Produkte von Reihen	130
3.4.8	Zusammensetzung und Division von Potenzreihen	134
	Aufgaben	137
4	Topologische Strukturen auf $\mathbb{R}$	145
4.1	Topologische Grundbegriffe in metrischen Räumen	145
4.2	Offene und zusammenhängende reelle Mengen	157
4.3	Kompakte und abgeschlossene reelle Mengen	158
4.4	Vervollständigung eines metrischen Raumes	161
	Aufgaben	163

Teil II Reelle Funktionen

5	Grenzwert und Stetigkeit	171
5.1	Grenzwerte von Funktionen	171
5.2	Stetige Funktionen	177
5.2.1	Stetige Funktionen auf Intervallen	183
5.2.2	Stetige Funktionen auf kompakte Mengen	190
5.2.3	Funktionenfolgen	193
5.2.4	Der Approximationssatz von Weierstraß	205
5.3	Anwendungen	209
5.3.1	Der wackelnde Tisch	210
5.3.2	Perioden bei der Iteration einer stetigen Funktion	211
5.3.3	Die Rotationszahl einer stetigen Kreisabbildung	216
	Aufgaben	223
6	Differenzierbarkeit	231
6.1	Intuitiv-geometrische Leitgedanken und Rechenregeln	231
6.2	Extrema und Mittelwertsätze	249
6.3	Taylorformel	269
6.4	Elementare Funktionen	270
6.4.1	Exponentialfunktion, Logarithmus und allgemeine Potenz	271
6.4.2	Die trigonometrischen Funktionen	279
6.5	Zweite Ableitung und konvexe Funktionen	290

- 6.6 Numerische Differentiation 307
- 6.7 Anwendungen 311
 - 6.7.1 Gedämpfte Schwingungen. 311
 - 6.7.2 Stetige Verzinsung 319
 - 6.7.3 Das Reflexionsgesetz der geometrischen Optik. 320
 - 6.7.4 Kriminelle Untersuchung. 325
 - 6.7.5 Die Ritter der Tafelrunde. 327
- Aufgaben. 328
- 7 Das Riemann'sche Integral 339**
 - 7.1 Unbestimmte Integrale. 339
 - 7.1.1 Methoden zur Bestimmung einer Stammfunktion. 341
 - 7.1.2 Nichtelementar integrierbare Funktionen 359
 - 7.2 Der Integralbegriff 362
 - 7.3 Hauptsätze der Integralrechnung 376
 - 7.4 Das Lebesgue-Kriterium der Riemann-Integrierbarkeit 382
 - 7.5 Variablentransformation. 390
 - 7.6 Taylorformel mit Integralfehlerterm 391
 - 7.7 Funktionenfolgen und Integrale. 396
 - 7.8 Uneigentliche Integrale 400
 - 7.8.1 Unbeschränktes Integrationsintervall. 400
 - 7.8.2 Unbeschränkte Funktionen 410
 - 7.9 Numerische Integration 412
 - 7.10 Anwendungen 426
 - 7.10.1 Das Basler Problem 427
 - 7.10.2 Die Euler-Konstante. 428
 - 7.10.3 Die Jensen-Ungleichung 429
 - 7.10.4 Die Stirling-Formel und Entropie 431
 - 7.10.5 Raketenflug 435
 - 7.10.6 Bevölkerungswachstum 439
 - 7.10.7 Atembeschwerden 444
 - Aufgaben. 447
- 8 Das Lebesgue-Integral 459**
 - 8.1 Mängel des Riemann'schen Integrals 459
 - 8.2 Paradigmenwechsel: messbare Mengen und Funktionen 461
 - 8.2.1 Lebesgue-messbare Mengen 462
 - 8.2.2 Lebesgue-messbare Funktionen. 480
 - 8.3 Integrierbare Funktionen 497
 - 8.3.1 Integral mittels der Verteilungsfunktion 498
 - 8.3.2 Dominierte Konvergenz. 512
 - 8.3.3 Parameterabhängige Integrale 519
 - 8.3.4 Vergleich mit dem Riemann-Integral. 524
 - 8.3.5 Approximation durch stetige Funktionen 525
 - 8.4 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 528
 - 8.5 Variablentransformation. 544

8.6	Mittelwertsätze.	548
8.7	Einige grundlegende Ungleichungen und Funktionenräume.	550
8.7.1	Die Jensen'sche Ungleichung	551
8.7.2	Die Hölder'sche Ungleichung	552
8.7.3	Die Minkowski'sche Ungleichung.	556
8.7.4	L^p -Räume.	557
8.7.5	Funktionen von beschränkter Variation	572
8.8	Einige feine Eigenschaften reeller Funktionen	578
8.8.1	Ableitbarkeit einer Lipschitz-Funktion	578
8.8.2	Integraldarstellung einer konvexen Funktion.	582
8.9	Anwendungen	585
8.9.1	Fourier-Reihen und -Integrale	585
8.9.2	Ergodentheorie.	611
	Aufgaben.	628
	Anhang	643
	Stichwortverzeichnis	693