

Inhaltsverzeichnis

1 Modellbildung	1
1.1 Allgemeine Modellbildung	1
1.1.1 Allgemeiner Modellbegriff und seine Hauptmerkmale	1
1.1.2 Die Situation-Modell-Beziehung	3
1.1.3 Modell-Typen	5
1.1.4 Grenzen und Gefahren der Modell-Auffassung	6
1.2 Was ist ein physikalisches Modell?	8
1.3 Was ist ein mathematisches Modell?	11
1.3.1 Begriffsklärungen und Charakterisierung	11
1.3.2 Funktionen mathematischer Modelle	15
1.3.3 Die Beziehung von Realität und Mathematik – das Anwendungsproblem	18
1.3.4 Der Modellierungskreislauf unter Einbezug physikalischer Modellierung und digitaler Werkzeuge	19
1.3.5 Gemeinsamkeiten und Unterschiede mathematischen Modellierens und mathematischen Problemlösens	22
1.4 Mathematische Modellbildung im Mathematikunterricht und im (Lehramts-)Studium	23
1.4.1 Ziele	23
1.4.2 Legitimation	26
1.4.3 Kriterien für <i>gute</i> Modellierungsbeispiele im Unterricht	33
1.4.4 Unterrichtliche Schwierigkeiten im Kontext des Modellierens	34
1.5 Mathematische Modellbildung im Sport	36
1.5.1 Sportliche Situationen aus mathematischer Perspektive	36
1.5.2 Kriterien für die Auswahl der Beispiele	36
1.5.3 Vorkenntnisse zum sportlichen Kontext sowie aus Physik und Mathematik	37
Literatur	38

2	Beispiele mathematischer Modellbildung im Sport für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I	43
2.1	Kettenschaltungen bei Rennrädern und Mountainbikes sowie Fahrradfahren bei Windstille und bei Rücken- bzw. Gegenwind	43
2.1.1	Vorbemerkungen	43
2.1.2	Physikalische Vorkenntnisse und mathematische Voraussetzungen bzw. Erweiterungsmöglichkeiten	45
2.1.3	Daten, Begriffsfestlegungen und hilfreiche Formeln zur Fahrradtechnik	45
2.1.4	Mathematisierung der Kettenschaltung eines Rennrads	49
2.1.5	Mathematisierung der Kettenschaltung eines Mountainbikes	55
2.1.6	Fahrradfahren bei Windstille und bei Rücken- bzw. Gegenwind	59
2.1.7	Nachbemerkungen	63
2.2	Punktebewertungen und Punkteformeln beim Zehnkampf der Männer und beim Siebenkampf der Frauen	64
2.2.1	Vorbemerkungen	64
2.2.2	Mathematische Voraussetzungen bzw. Erweiterungsmöglichkeiten	65
2.2.3	Die Punkteformeln für den Zehnkampf der Männer	65
2.2.4	Die Punkteformeln für den Siebenkampf der Frauen	71
2.2.5	Nachbemerkungen	73
2.3	Zur Ökonomie von Hochsprungstilen	75
2.3.1	Vorbemerkungen	75
2.3.2	Physikalische Vorkenntnisse und mathematische Voraussetzungen bzw. Erweiterungsmöglichkeiten	77
2.3.3	Ein Massen- und Längenmodell des menschlichen Körpers und seine Anwendung auf die Absprungsphase beim Hochsprung mittels Flop-Technik	77
2.3.4	Lage des Körperschwerpunkts im Moment der Lattenüberquerung beim Flop	81
2.3.5	Validierung der Modellergebnisse mithilfe neuerer Erkenntnisse der Biomechanik	86
	Literatur	87
3	Beispiele mathematischer Modellbildung im Sport für den Mathematikunterricht in den Sekundarstufen I und II	89
3.1	Physikalische und mathematische Modellierung des Windsurfens	89
3.1.1	Vorbemerkungen	89
3.1.2	Physikalische Vorkenntnisse und mathematische Voraussetzungen bzw. Erweiterungsmöglichkeiten	91

3.1.3 Themen für die Sekundarstufe I 91

3.1.3.1 Berechnung von Kräften, die beim Windsurfen
auftreten 91

3.1.3.2 Relative Geschwindigkeit 98

3.1.4 Themen für die Sekundarstufe II 100

3.1.4.1 Bestimmung des Druckzentrums des Segels beim
Windsurfen 100

3.1.4.2 Die Methode des *Pumpens* beim Windsurfen 104

3.1.5 Nachbemerkungen 105

3.2 Die günstigste Segelstellung beim Segeln 105

3.2.1 Vorbemerkungen 105

3.2.2 Physikalische Vorkenntnisse und mathematische
Voraussetzungen bzw. Erweiterungsmöglichkeiten 106

3.2.3 Vorschlag einer Behandlung des Themas in der
Sekundarstufe I 106

3.2.4 Vorschlag einer Behandlung des Themas in der
Sekundarstufe II: Das Kreuzen vor dem Wind 110

3.2.5 Nachbemerkungen 118

Literatur 118

**4 Beispiele mathematischer Modellbildung im Sport für den
Mathematikunterricht in den Sekundarstufen I und II sowie
für das Studium 121**

4.1 Mathematik „rund um eine Laufbahn“ 121

4.1.1 Vorbemerkungen 121

4.1.2 Mathematische Voraussetzungen bzw.
Erweiterungsmöglichkeiten 123

4.1.3 Die Laufbahn und das einbeschriebene Fußballfeld
(Sekundarstufe I) 123

4.1.4 Einzelbahnen, Kurvenvorgaben und Randmarken
(Sekundarstufe I) 124

4.1.5 Startlinien für den 5000 *m*-Lauf und den 10.000 *m*-Lauf
(Sekundarstufe I) 130

4.1.6 Spezielle Abmessungen beim 3000 *m*-Hindernislauf
(Sekundarstufe I) 134

4.1.7 Die Startlinie für den 1500 *m*-Lauf und weitere Kurven
auf der Laufbahn (Sekundarstufe II) 136

4.1.8 Ein kurzer (auch historischer) Exkurs zu den Diskussionen um
andere Laufbahnformen: Korbbogen-, Klothoiden- und
Evolventenbahnen (Studium) 142

4.1.9 Nachbemerkungen 151

4.2	Optimierung des Aufschlags und des Smash beim Volleyball mit resultierenden Ratschlägen für Aktive und Trainer(innen)	153
4.2.1	Vorbemerkungen	153
4.2.2	Physikalische Vorkenntnisse und mathematische Voraussetzungen bzw. Erweiterungsmöglichkeiten	155
4.2.3	Mathematische Modelle zum Aufschlag (bzw. zum Smash) beim Volleyball	156
4.2.3.1	Modell A (Berücksichtigung der Gravitation, Sekundarstufe I)	156
4.2.3.2	Modell B (Berücksichtigung der Gravitation und des Luftwiderstands, Sekundarstufe II)	160
4.2.3.3	Modell C (Berücksichtigung von Gravitation, Luftwiderstand und Topspin, Studium)	162
4.2.4	Zur Optimierung des Smash beim Volleyball	164
4.2.5	Ratschläge für Aktive und ihre Trainer(innen)	167
4.3	Straf-, Ab-, Eck- und Freistoß beim Fußball aus mathematischer Sicht	167
4.3.1	Vorbemerkungen	167
4.3.2	Physikalische Vorkenntnisse und mathematische Voraussetzungen bzw. Erweiterungsmöglichkeiten	168
4.3.3	Zugänge zur mathematischen Modellierung des Strafstoßes beim Fußball (Sekundarstufe I)	169
4.3.3.1	Zugang 1	169
4.3.3.2	Zugang 2	172
4.3.3.3	Zugang 3	176
4.3.3.4	Zugang 4	179
4.3.3.5	Zugang 5	183
4.3.4	Der Abstoß beim Fußball (Sekundarstufe II)	183
4.3.4.1	Modell A	184
4.3.4.2	Modell B	184
4.3.4.3	Modell C	188
4.3.5	Eck- und Freistöße im Fußball, die zu einem Torerfolg führen (Studium)	189
4.4	Mathematische Modellbildungen zum Skispringen	199
4.4.1	Vorbemerkungen	199
4.4.2	Physikalische Vorkenntnisse und mathematische Voraussetzungen bzw. Erweiterungsmöglichkeiten	205
4.4.3	Modell A: Modellierung der Phase des Skiflugs als waagerechter Wurf (Sekundarstufe I)	206
4.4.4	Modell B: Die Kurve des Anlaufprofils einer Skisprungschanze als Funktionsgraph (Sekundarstufe II)	209

4.4.5	Modell C: Die Kurve des Landeprofiles einer Skisprungschanze als Funktionsgraph (Sekundarstufe II)	212
4.4.6	Modell D: Modellierung der Phase des Anlaufs zum Skisprung (Studium)	218
4.4.7	Modell E: Modellierung der Phase des Skiflugs (Studium)	221
4.4.8	Nachbemerkung	226
4.5	Modelle und Strategien zum Aufschlag beim Tennis	226
4.5.1	Vorbemerkungen	226
4.5.2	Physikalische Vorkenntnisse und mathematische Voraussetzungen bzw. Erweiterungsmöglichkeiten	228
4.5.3	Modelle zum Aufschlag beim Tennis	228
4.5.3.1	Modell A (geradliniger Flug des Balls, Netz überall gleich hoch; Sekundarstufe I)	228
4.5.3.2	Modell B (geradliniger Flug des Balls, unterschiedliche Netzhöhen; Sekundarstufe I)	232
4.5.3.3	Modell C (Berücksichtigung der Gravitation; Sekundarstufe II)	236
4.5.3.4	Modell D (Berücksichtigung von Gravitation und Luftwiderstand; Sekundarstufe II)	240
4.5.3.5	Modell E (Berücksichtigung von Gravitation, Luftwiderstand und Topspin; Studium)	241
4.5.3.6	Modell F (Berücksichtigung von Gravitation, Luftwiderstand, Sidespin/Slice und Wind; Studium)	247
4.5.3.7	Modell G (Berücksichtigung von Gravitation, Luftwiderstand sowie Kombinationen von Topspin und Sidespin/Slice; Studium)	247
4.5.4	Verortung der Modelle A bis G im Modellierungskreislauf	253
4.5.5	Strategien zum Aufschlag beim Tennis (Sekundarstufe II)	255
4.6	Problemstellungen und mathematische Modelle zum Freiwurf beim Basketball	261
4.6.1	Vorbemerkungen	261
4.6.2	Physikalische Vorkenntnisse und mathematische Voraussetzungen bzw. Erweiterungsmöglichkeiten	264
4.6.3	Probleme aus der Trigonometrie für die Sekundarstufe I	264
4.6.4	Modell A: Der <i>beste</i> Abwurfwinkel beim Freiwurf in Abhängigkeit von der Körpergröße der Athletin/des Athleten (Sekundarstufe II)	269
4.6.5	Modell B: Die <i>beste</i> Flugkurve beim Freiwurf in Abhängigkeit von der Körpergröße der Athletin/des Athleten (Studium)	278

4.6.6	Problem 5: Welche geometrische Gestalt hat die Menge aller Punkte (in der Ebene des Korbrings), durch die der Mittelpunkt des Balls gehen kann, ohne dass dieser den Korbring berührt? (Studium)	285
4.6.7	Nachbemerkungen	294
	Literatur	295
5	Beispiele mathematischer Modellbildung im Sport für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II	299
5.1	Wahrscheinlichkeitstheoretische Untersuchungen zu den Zählweisen beim Tennis und Tischtennis	299
5.1.1	Die „Ars Conjectandi“ von <i>Jakob Bernoulli</i> mit dem Anhang „Brief an einen Freund über das Ballspiel (Jeu de Paume)“	299
5.1.2	Die Zählweisen beim Tennis und Tischtennis	300
5.1.3	Mathematische Voraussetzungen bzw. Erweiterungsmöglichkeiten	301
5.1.4	Gewinnwahrscheinlichkeiten beim Tennis (Spiel, Tie-Break, Satz, Match mit zwei oder drei Gewinnsätzen)	302
5.1.5	Gewinnwahrscheinlichkeiten beim Tischtennis (Satz, Spiel mit drei oder vier Gewinnsätzen)	308
5.1.6	Vergleich der Siegwahrscheinlichkeiten in einem Satz beim Tennis und Tischtennis sowie in einem Match mit drei Gewinnsätzen	310
5.1.7	Nachbemerkungen	311
5.2	Die Geschwindigkeit eines Ruderbootes im Verlauf eines Rennens	311
5.2.1	Vorbemerkung	311
5.2.2	Physikalische Vorkenntnisse und mathematische Voraussetzungen bzw. Erweiterungsmöglichkeiten	311
5.2.3	Einleitung	312
5.2.4	Erläuterungen und Modellvoraussetzungen	313
5.2.5	Ein mathematisches Modell zu einem Ruderschlag	317
	5.2.5.1 Modellieren der Antriebsphase	317
	5.2.5.2 Modellieren der Freilaufphase	323
5.2.6	Beispielrechnung für einen Rennruder-Achter	326
5.2.7	Ein mathematisches Modell zum Rudern in zwei Phasen	331
	5.2.7.1 Beschreibung der zwei Phasen	331
	5.2.7.2 Notwendige Verlängerung des Bootes	335
	5.2.7.3 Die Differenzialgleichungen für verschiedene Zeitintervalle	337
5.2.8	Vergleich der konventionellen Technik mit der Zwei-Phasen-Technik	342
5.2.9	Nachbemerkungen	344
	Literatur	344

6 Beispiele mathematischer Modellbildung im Sport für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II und für das Studium 347

6.1 Physikalische und mathematische Modellierung des Kugelstoßens 347

6.1.1 Vorbemerkungen 347

6.1.2 Physikalische Vorkenntnisse und mathematische Voraussetzungen bzw. Erweiterungsmöglichkeiten 348

6.1.3 Das parabolische Bahnmodell und seine Grenzen (Sekundarstufe II) 348

6.1.4 Das Bahnmodell mit Berücksichtigung des Luftwiderstands (Sekundarstufe II oder Studium) 358

6.1.5 Analytische Behandlung (Studium) 370

6.2 Mathematische Modellbildungen zum Weitsprung – unter besonderer Berücksichtigung der Weltrekordsprünge von *Bob Beamon* und *Mike Powell* 374

6.2.1 Vorbemerkungen 374

6.2.2 Physikalische Vorkenntnisse und mathematische Voraussetzungen bzw. Erweiterungsmöglichkeiten 377

6.2.3 Zur rechnerischen Ermittlung der Sprungweite beim Weitsprung sowie zum Einfluss der geografischen Breite, der Höhenlage von *Mexiko-Stadt* und des Rückenwinds auf die Weite des Weltrekordsprungs von *Bob Beamon* 1968 (Sekundarstufe II) 377

6.2.4 Die Bewegungsgleichung der Flugphase beim Weitsprung und ihre Anwendung auf den Weltrekordsprung von *Bob Beamon* (Studium) 388

6.2.5 Untersuchungen zum optimalen Absprungwinkel beim Weitsprung (Studium) 393

6.2.6 Nachbemerkungen 404

6.3 Mathematische Modellierung des Einwurfs im Fußballsport 405

6.3.1 Vorbemerkungen 405

6.3.2 Physikalische Vorkenntnisse und mathematische Voraussetzungen bzw. Erweiterungsmöglichkeiten 406

6.3.3 Optimaler Einwurfwinkel gemäß Modell A (ausschließliche Berücksichtigung der Gravitation) 407

6.3.4 Optimaler Einwurfwinkel gemäß Modell B (außer der Gravitation Berücksichtigung des Luftwiderstands) 409

6.3.5 Optimaler Einwurfwinkel gemäß Modell C (außer Gravitation und Luftwiderstand Berücksichtigung des Backspin) und gemäß Modell D (Vergrößerung des Luftwiderstands durch den Backspin) 411

6.3.6	Eine unkonventionelle Ausführung des Einwurfs	414
6.3.7	Erkenntnisse und Empfehlungen zur Ausführung des Einwurfs für Fußballspieler(innen) und ihre Trainer(innen)	414
	Literatur	415
7	Beispiele mathematischer Modellbildung im Sport für das Studium . . .	419
7.1	Mathematische Modellierung der Skiabfahrt	419
7.1.1	Vorbemerkungen	419
7.1.2	Physikalische Vorkenntnisse und mathematische Voraussetzungen	420
7.1.3	Ein mathematisches Modell der Skiabfahrt	420
7.2	Physikalische und mathematische Modellierung des Speerwurfs	426
7.2.1	Vorbemerkungen	426
7.2.2	Physikalische Vorkenntnisse und mathematische Voraussetzungen	427
7.2.3	Informationen zum Wettkampfspeer	427
7.2.4	Kräfte und Drehmomente am Speer	428
7.2.5	Der Speerflug in einer Ebene	431
	7.2.5.1 Modellannahmen	431
	7.2.5.2 Einige Erläuterungen zum Speerwurf	432
7.2.6	Herleitung der Bewegungsgleichungen	434
	7.2.6.1 Die Bewegungsgleichungen der Translation	435
	7.2.6.2 Die Bewegungsgleichung der Rotation um die Querachse des Speers	443
7.2.7	Eine numerische Methode zur Lösung der Bewegungsgleichungen	445
7.2.8	Vergleich der Ergebnisse des digitalen Werkzeugmodells mit empirischen Daten	446
	7.2.8.1 Ein Computerprogramm	446
	7.2.8.2 Ein Vergleich mit empirischen Daten	447
7.2.9	Die durchgeführte Modellbildung mit Blick auf einen ergänzten Modellierungskreislauf	449
7.3	<i>Tartaglia</i> -Flugkurven beim Badminton	451
7.3.1	Unterschiedliche Typen von Flugkurven in der Ballistik – die klassische Parabel von <i>Galilei</i> und die <i>Tartaglia</i> -Kurve	451
7.3.2	Physikalische Kenntnisse und mathematische Voraussetzungen	453
7.3.3	Luftwiderstand beim Federball gemäß <i>Stokes</i> oder <i>Newton</i> ? . . .	453
7.3.4	Zu einer Theorie über Endgeschwindigkeiten bei Sportbällen	467
7.4	Physikalische und mathematische Modellierung des Diskuswurfs	469
7.4.1	Vorbemerkungen	469

7.4.2	Physikalische Vorkenntnisse und mathematische Voraussetzungen	471
7.4.3	Informationen zum Diskus	471
7.4.4	Kräfte und Drehmomente am Diskus	472
7.4.5	Physikalisch-mathematische Modellierung des Diskusflugs	474
7.4.6	Optimale Flugkurven zum Diskuswurf	482
	Literatur	484
8	Schlussbemerkungen	487
	Bisher erschienene Bände der Reihe Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II	491