

Inhaltsverzeichnis

I Allgemeine Grundlagen	1
1 Einige grundlegende Begriffe über Mengen	1
1.1 Definition und Darstellung einer Menge	1
1.2 Mengenoperationen	3
2 Die Menge der reellen Zahlen	6
2.1 Darstellung der reellen Zahlen und ihrer Eigenschaften	6
2.2 Anordnung der Zahlen, Ungleichung, Betrag	7
2.3 Teilmengen und Intervalle	8
3 Gleichungen	9
3.1 Lineare Gleichungen	10
3.2 Quadratische Gleichungen	10
3.3 Gleichungen 3. und höheren Grades	11
3.3.1 Allgemeine Vorbetrachtung	11
3.3.2 Kubische Gleichungen vom speziellen Typ $ax^3 + bx^2 + cx = 0$	12
3.3.3 Bi-quadratische Gleichungen	12
3.4 Wurzelgleichungen	13
3.5 Betragsgleichungen	15
3.5.1 Definition der Betragsfunktion	15
3.5.2 Analytische Lösung einer Betragsgleichung durch Fallunterscheidung (Beispiel)	18
3.5.3 Lösung einer Betragsgleichung auf halb-graphischem Wege (Beispiel)	19
4 Ungleichungen	20
5 Lineare Gleichungssysteme	23
5.1 Ein einführendes Beispiel	23
5.2 Der Gaußsche Algorithmus	26
5.3 Ein Anwendungsbeispiel: Berechnung eines elektrischen Netzwerkes	35
6 Der Binomische Lehrsatz	37
Übungsaufgaben	41
Zu Abschnitt 1 und 2	41
Zu Abschnitt 3	41

Zu Abschnitt 4	42
Zu Abschnitt 5	42
Zu Abschnitt 6	44
II Vektoralgebra	45
1 Grundbegriffe	45
1.1 Definition eines Vektors	45
1.2 Gleichheit von Vektoren	46
1.3 Parallele, anti-parallele und kollineare Vektoren	47
1.4 Vektoroperationen	48
1.4.1 Addition von Vektoren	49
1.4.2 Subtraktion von Vektoren	51
1.4.3 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	52
2 Vektorrechnung in der Ebene	54
2.1 Komponentendarstellung eines Vektors	54
2.2 Darstellung der Vektoroperationen	58
2.2.1 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	58
2.2.2 Addition und Subtraktion von Vektoren	59
2.3 Skalarprodukt zweier Vektoren	61
2.3.1 Definition und Berechnung eines Skalarproduktes	61
2.3.2 Winkel zwischen zwei Vektoren	64
2.4 Linear unabhängige Vektoren	67
2.5 Ein Anwendungsbeispiel: Resultierende eines ebenen Kräftesystems	69
3 Vektorrechnung im 3-dimensionalen Raum	71
3.1 Komponentendarstellung eines Vektors	72
3.2 Darstellung der Vektoroperationen	75
3.2.1 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	75
3.2.2 Addition und Subtraktion von Vektoren	77
3.3 Skalarprodukt zweier Vektoren	79
3.3.1 Definition und Berechnung eines Skalarproduktes	79
3.3.2 Winkel zwischen zwei Vektoren	82
3.3.3 Richtungswinkel eines Vektors	83
3.3.4 Projektion eines Vektors auf einen zweiten Vektor	85
3.3.5 Ein Anwendungsbeispiel: Arbeit einer Kraft	88
3.4 Vektorprodukt zweier Vektoren	90
3.4.1 Definition und Berechnung eines Vektorproduktes	90
3.4.2 Anwendungsbeispiele	96
3.4.2.1 Drehmoment (Moment einer Kraft)	96
3.4.2.2 Bewegung von Ladungsträgern in einem Magnetfeld (Lorentz-Kraft)	97
3.5 Spatprodukt (gemischtes Produkt)	98
3.6 Linear unabhängige Vektoren	102

4 Anwendungen in der Geometrie	105
4.1 Vektorielle Darstellung einer Geraden	105
4.1.1 Punkt-Richtungs-Form einer Geraden	105
4.1.2 Zwei-Punkte-Form einer Geraden	107
4.1.3 Abstand eines Punktes von einer Geraden	108
4.1.4 Abstand zweier paralleler Geraden	110
4.1.5 Abstand zweier windschiefer Geraden	112
4.1.6 Schnittpunkt und Schnittwinkel zweier Geraden	114
4.2 Vektorielle Darstellung einer Ebene	117
4.2.1 Punkt-Richtungs-Form einer Ebene	117
4.2.2 Drei-Punkte-Form einer Ebene	119
4.2.3 Gleichung einer Ebene senkrecht zu einem Vektor	122
4.2.4 Abstand eines Punktes von einer Ebene	123
4.2.5 Abstand einer Geraden von einer Ebene	125
4.2.6 Schnittpunkt und Schnittwinkel einer Geraden mit einer Ebene	126
4.2.7 Abstand zweier paralleler Ebenen	130
4.2.8 Schnittgerade und Schnittwinkel zweier Ebenen	132
Übungsaufgaben	135
Zu Abschnitt 2 und 3	135
Zu Abschnitt 4	141
 III Funktionen und Kurven	 146
1 Definition und Darstellung einer Funktion	146
1.1 Definition einer Funktion	146
1.2 Darstellungsformen einer Funktion	147
1.2.1 Analytische Darstellung	147
1.2.2 Darstellung durch eine Wertetabelle (Funktionstafel)	148
1.2.3 Graphische Darstellung	148
1.2.4 Parameterdarstellung einer Funktion	149
2 Allgemeine Funktionseigenschaften	151
2.1 Nullstellen	151
2.2 Symmetrieverhalten	152
2.3 Monotonie	154
2.4 Periodizität	157
2.5 Umkehrfunktion oder inverse Funktion	159
3 Koordinatentransformationen	163
3.1 Ein einführendes Beispiel	163
3.2 Parallelverschiebung eines kartesischen Koordinatensystems	164
3.3 Übergang von kartesischen Koordinaten zu Polarkoordinaten	168
3.3.1 Definition der Polarkoordinaten	168
3.3.2 Darstellung einer Kurve in Polarkoordinaten	171

4 Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion	173
4.1 Reelle Zahlenfolgen	173
4.1.1 Definition und Darstellung einer reellen Zahlenfolge	173
4.1.2 Grenzwert einer Folge	175
4.2 Grenzwert einer Funktion	177
4.2.1 Grenzwert einer Funktion für $x \rightarrow x_0$	177
4.2.2 Grenzwert einer Funktion für $x \rightarrow \pm \infty$	181
4.2.3 Rechenregeln für Grenzwerte	183
4.2.4 Ein Anwendungsbeispiel: Erzwungene Schwingung eines mechanischen Systems	184
4.3 Stetigkeit einer Funktion	185
4.4 Unstetigkeiten (Lücken, Pole, Sprünge)	186
5 Ganzrationale Funktionen (Polynomfunktionen)	190
5.1 Definition einer ganzrationalen Funktion	190
5.2 Konstante und lineare Funktionen	191
5.3 Quadratische Funktionen	194
5.4 Polynomfunktionen höheren Grades	198
5.5 Horner-Schema und Nullstellenberechnung einer Polynomfunktion	203
5.6 Interpolationspolynome	207
5.6.1 Allgemeine Vorbetrachtung	207
5.6.2 Interpolationspolynom von Newton	208
5.7 Ein Anwendungsbeispiel: Biegelinie eines Balkens	212
6 Gebrochenrationale Funktionen	212
6.1 Definition einer gebrochenrationalen Funktion	212
6.2 Nullstellen, Definitionslücken, Pole	213
6.3 Asymptotisches Verhalten einer gebrochenrationalen Funktion im Unendlichen	219
6.4 Ein Anwendungsbeispiel: Kapazität eines Kugelkondensators	222
7 Potenz- und Wurfelfunktionen	223
7.1 Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten	223
7.2 Wurfelfunktionen	225
7.3 Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten	228
7.4 Ein Anwendungsbeispiel: Beschleunigung eines Elektrons in einem elektrischen Feld	229
8 Kegelschnitte	230
8.1 Darstellung eines Kegelschnittes durch eine algebraische Gleichung 2. Grades mit konstanten Koeffizienten	230
8.2 Gleichungen eines Kreises	231
8.3 Gleichungen einer Ellipse	232
8.4 Gleichungen einer Hyperbel	234
8.5 Gleichungen einer Parabel	237
8.6 Beispiele zu den Kegelschnitten	239

9 Trigonometrische Funktionen	243
9.1 Grundbegriffe	243
9.2 Sinus- und Kosinusfunktion	248
9.3 Tangens- und Kotangensfunktion	249
9.4 Wichtige Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen	250
9.5 Anwendungen in der Schwingungslehre	252
9.5.1 Harmonische Schwingungen (Sinusschwingungen)	252
9.5.1.1 Die allgemeine Sinus- und Kosinusfunktion	252
9.5.1.2 Harmonische Schwingung eines Federpendels (Feder-Masse-Schwinger)	257
9.5.2 Darstellung von Schwingungen im Zeigerdiagramm	258
9.5.3 Superposition (Überlagerung) gleichfrequenter Schwingungen	265
9.5.4 Lissajous-Figuren	270
10 Arkusfunktionen	271
10.1 Das Problem der Umkehrung trigonometrischer Funktionen	271
10.2 Arkussinusfunktion	272
10.3 Arkuskosinusfunktion	274
10.4 Arkustangens- und Arkuskotangensfunktion	275
10.5 Trigonometrische Gleichungen	278
11 Exponentialfunktionen	280
11.1 Grundbegriffe	280
11.2 Definition und Eigenschaften einer Exponentialfunktion	280
11.3 Spezielle, in den Anwendungen häufig auftretende Funktionstypen mit e-Funktionen	282
11.3.1 Abklingfunktionen	282
11.3.2 Sättigungsfunktionen	285
11.3.3 Wachstumsfunktionen	288
11.3.4 Gedämpfte Schwingungen	289
11.3.5 Gauß-Funktionen	291
12 Logarithmusfunktionen	292
12.1 Grundbegriffe	292
12.2 Definition und Eigenschaften einer Logarithmusfunktion	295
12.3 Exponential- und Logarithmusgleichungen	298
13 Hyperbel- und Areafunktionen	300
13.1 Hyperbelfunktionen	300
13.1.1 Definition der Hyperbelfunktionen	300
13.1.2 Die Hyperbelfunktionen $y = \sinh x$ und $y = \cosh x$	301
13.1.3 Die Hyperbelfunktionen $y = \tanh x$ und $y = \coth x$	303
13.1.4 Wichtige Beziehungen zwischen den Hyperbelfunktionen	304
13.2 Areafunktionen	305
13.2.1 Definition der Areafunktionen	305
13.2.2 Die Areafunktionen $y = \operatorname{arsinh} x$ und $y = \operatorname{arcosh} x$	305

13.2.3 Die Areafunktionen $y = \operatorname{artanh} x$ und $y = \operatorname{arcoth} x$	306
13.2.4 Darstellung der Areafunktionen durch Logarithmusfunktionen ...	307
13.2.5 Ein Anwendungsbeispiel: Freier Fall unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes	308
14 Spezielle ebene Kurven	309
14.1 Rollkurven oder Zykloiden	309
14.1.1 Gewöhnliche Zykloiden	310
14.1.2 Epizykloiden	312
14.1.3 Hypozykloiden	313
14.2 Astroide (Sternkurve)	314
14.3 Kardioide (Herzkurve)	315
14.4 Lemniskate oder Schleifenkurve von Bernoulli	316
14.5 Spiralen	318
14.5.1 Archimedische Spirale	318
14.5.2 Logarithmische Spirale	320
Übungsaufgaben	321
Zu Abschnitt 1	321
Zu Abschnitt 2	322
Zu Abschnitt 3	323
Zu Abschnitt 4	324
Zu Abschnitt 5	325
Zu Abschnitt 6	328
Zu Abschnitt 7	328
Zu Abschnitt 8	329
Zu Abschnitt 9 und 10	329
Zu Abschnitt 11, 12 und 13	332
Zu Abschnitt 14	334
 IV Differentialrechnung	 335
1 Differenzierbarkeit einer Funktion	335
1.1 Das Tangentenproblem	335
1.2 Ableitung einer Funktion	336
1.3 Ableitung der elementaren Funktionen	340
2 Ableitungsregeln	343
2.1 Faktorregel	343
2.2 Summenregel	344
2.3 Produktregel	345
2.4 Quotientenregel	347
2.5 Kettenregel	349
2.6 Kombinationen mehrerer Ableitungsregeln	355

Inhaltsverzeichnis	XV
2.7 Logarithmische Ableitung	356
2.8 Ableitung der Umkehrfunktion	358
2.9 Implizite Differentiation	359
2.10 Differential einer Funktion	362
2.11 Höhere Ableitungen	364
2.12 Ableitung einer in der Parameterform dargestellten Funktion (Kurve)	366
2.13 Anstieg einer in Polarkoordinaten dargestellten Kurve	369
2.14 Einfache Anwendungsbeispiele aus Physik und Technik	373
2.14.1 Bewegung eines Massenpunktes (Geschwindigkeit, Beschleunigung)	373
2.14.2 Induktionsgesetz	376
2.14.3 Elektrischer Schwingkreis	377
3 Anwendungen der Differentialrechnung	378
3.1 Tangente und Normale	378
3.2 Linearisierung einer Funktion	380
3.3 Monotonie und Krümmung einer Kurve	383
3.3.1 Geometrische Vorbetrachtungen	383
3.3.2 Monotonie	384
3.3.3 Krümmung einer ebenen Kurve	386
3.4 Charakteristische Kurvenpunkte	394
3.4.1 Relative oder lokale Extremwerte	394
3.4.2 Wendepunkte, Sattelpunkte	400
3.4.3 Ergänzungen	404
3.5 Extremwertaufgaben	406
3.6 Kurvendiskussion	412
3.7 Näherungsweise Lösung einer Gleichung nach dem Tangentenverfahren von Newton	418
3.7.1 Iterationsverfahren	418
3.7.2 Tangentenverfahren von Newton	419
Übungsaufgaben	426
Zu Abschnitt 1	426
Zu Abschnitt 2	426
Zu Abschnitt 3	430
V Integralrechnung	434
1 Integration als Umkehrung der Differentiation	434
2 Das bestimmte Integral als Flächeninhalt	438
2.1 Ein einführendes Beispiel	438
2.2 Das bestimmte Integral	441
3 Unbestimmtes Integral und Flächenfunktion	448

4 Der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung	452
5 Grund- oder Stammintegrale	456
6 Berechnung bestimmter Integrale unter Verwendung einer Stammfunktion	458
7 Elementare Integrationsregeln	462
8 Integrationsmethoden	465
8.1 Integration durch Substitution	465
8.1.1 Ein einführendes Beispiel	465
8.1.2 Spezielle Integralsubstitutionen	466
8.2 Partielle Integration oder Produktintegration	474
8.3 Integration einer echt gebrochenrationalen Funktion durch Partialbruchzerlegung des Integranden	480
8.3.1 Partialbruchzerlegung	481
8.3.2 Integration der Partialbrüche	483
8.4 Numerische Integrationsmethoden	487
8.4.1 Trapezformel	488
8.4.2 Simpsonsche Formel	493
9 Uneigentliche Integrale	499
9.1 Unendliches Integrationsintervall	500
9.2 Integrand mit einer Unendlichkeitsstelle (Pol)	504
10 Anwendungen der Integralrechnung	507
10.1 Einfache Beispiele aus Physik und Technik	507
10.1.1 Integration der Bewegungsgleichung	507
10.1.2 Biegelinie (elastische Linie) eines einseitig eingespannten Balkens	510
10.1.3 Spannung zwischen zwei Punkten eines elektrischen Feldes	512
10.2 Flächeninhalt	513
10.2.1 Bestimmtes Integral und Flächeninhalt (Ergänzungen)	513
10.2.2 Flächeninhalt zwischen zwei Kurven	518
10.3 Volumen eines Rotationskörpers (Rotationsvolumen)	524
10.4 Bogenlänge einer ebenen Kurve	530
10.5 Mantelfläche eines Rotationskörpers (Rotationsfläche)	533
10.6 Arbeits- und Energiegrößen	537
10.7 Lineare und quadratische Mittelwerte	543
10.8 Schwerpunkt homogener Flächen und Körper	548
10.8.1 Grundbegriffe	548
10.8.2 Schwerpunkt einer homogenen ebenen Fläche	550
10.8.3 Schwerpunkt eines homogenen Rotationskörpers	556
10.9 Massenträgheitsmomente	561
10.9.1 Grundbegriffe und einfache Beispiele	561
10.9.2 Satz von Steiner	564
10.9.3 Massenträgheitsmoment eines homogenen Rotationskörpers	566

Übungsaufgaben	571
Zu Abschnitt 1 bis 7	571
Zu Abschnitt 8	574
Zu Abschnitt 9	576
Zu Abschnitt 10	577
VI Potenzreihenentwicklungen	582
1 Unendliche Reihen	582
1.1 Ein einführendes Beispiel	582
1.2 Grundbegriffe	584
1.2.1 Definition einer unendlichen Reihe	584
1.2.2 Konvergenz und Divergenz einer unendlichen Reihe	585
1.2.3 Über den Umgang mit unendlichen Reihen	589
1.3 Konvergenzkriterien	590
1.3.1 Quotientenkriterium	591
1.3.2 Wurzelkriterium	595
1.3.3 Vergleichskriterien	595
1.3.4 Leibnizsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen	598
1.4 Eigenschaften konvergenter bzw. absolut konvergenter Reihen	600
2 Potenzreihen	602
2.1 Definition einer Potenzreihe	602
2.2 Konvergenzverhalten einer Potenzreihe	603
2.3 Eigenschaften der Potenzreihen	608
3 Taylor-Reihen	609
3.1 Ein einführendes Beispiel	610
3.2 Potenzreihenentwicklung einer Funktion	611
3.2.1 Mac Laurinsche Reihe	611
3.2.2 Taylorsche Reihe	619
3.2.3 Tabellarische Zusammenstellung wichtiger Potenzreihenentwicklungen	620
3.3 Anwendungen der Potenzreihenentwicklungen	622
3.3.1 Näherungspolynome einer Funktion	622
3.3.2 Integration durch Potenzreihenentwicklung des Integranden	633
3.3.3 Grenzwertregel von Bernoulli und de L'Hospital	636
3.4 Ein Anwendungsbeispiel: Freier Fall unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes	642
Übungsaufgaben	645
Zu Abschnitt 1	645
Zu Abschnitt 2	647
Zu Abschnitt 3	647

VII Komplexe Zahlen und Funktionen	652
1 Definition und Darstellung einer komplexen Zahl	652
1.1 Definition einer komplexen Zahl	652
1.2 Komplexe oder Gaußsche Zahlenebene	655
1.3 Weitere Grundbegriffe	658
1.4 Darstellungsformen einer komplexen Zahl	661
1.4.1 Algebraische oder kartesische Form	661
1.4.2 Trigonometrische Form	661
1.4.3 Exponentialform	664
1.4.4 Zusammenstellung der verschiedenen Darstellungsformen	666
1.4.5 Umrechnungen zwischen den Darstellungsformen	667
2 Komplexe Rechnung	673
2.1 Grundrechenarten für komplexe Zahlen	673
2.1.1 Addition und Subtraktion komplexer Zahlen	673
2.1.2 Multiplikation und Division komplexer Zahlen	675
2.1.3 Grundgesetze für komplexe Zahlen (Zusammenfassung)	684
2.2 Potenzieren	685
2.3 Radizieren (Wurzelziehen)	687
2.4 Natürlicher Logarithmus	693
3 Anwendungen der komplexen Rechnung	695
3.1 Symbolische Darstellung harmonischer Schwingungen im Zeigerdiagramm	695
3.1.1 Darstellung einer Schwingung durch einen rotierenden Zeiger	695
3.1.2 Ungestörte Überlagerung gleichfrequenter Schwingungen	699
3.1.3 Ein Anwendungsbeispiel: Überlagerung gleichfrequenter Wechselspannungen	702
3.2 Symbolische Berechnung eines Wechselstromkreises	703
3.2.1 Das Ohmsche Gesetz der Wechselstromtechnik	703
3.2.2 Komplexe Wechselstromwiderstände und Leitwerte	705
3.2.3 Ein Anwendungsbeispiel: Der Wechselstromkreis in Reihenschaltung	710
4 Ortskurven	713
4.1 Ein einführendes Beispiel	713
4.2 Ortskurve einer parameterabhängigen komplexen Größe	714
4.3 Anwendungsbeispiele: Einfache Netzwerkfunktionen	717
4.3.1 Reihenschaltung aus einem ohmschen Widerstand und einer Induktivität (Widerstands Ortskurve)	717
4.3.2 Parallelschaltung aus einem ohmschen Widerstand und einer Kapazität (Leitwert Ortskurve)	718
4.4 Inversion einer Ortskurve	719
4.4.1 Inversion einer komplexen Größe (Zahl)	719
4.4.2 Inversionsregeln	721
4.4.3 Ein Anwendungsbeispiel: Inversion einer Widerstands Ortskurve	723

Übungsaufgaben	726
Zu Abschnitt 1	726
Zu Abschnitt 2	727
Zu Abschnitt 3	729
Zu Abschnitt 4	731
 Anhang: Lösungen der Übungsaufgaben	 733
 I Allgemeine Grundlagen	 733
Abschnitt 1 und 2	733
Abschnitt 3	733
Abschnitt 4	735
Abschnitt 5	738
Abschnitt 6	739
 II Vektoralgebra	 740
Abschnitt 2 und 3	740
Abschnitt 4	746
 III Funktionen und Kurven	 755
Abschnitt 1	755
Abschnitt 2	757
Abschnitt 3	758
Abschnitt 4	759
Abschnitt 5	761
Abschnitt 6	764
Abschnitt 7	767
Abschnitt 8	767
Abschnitt 9 und 10	768
Abschnitt 11, 12 und 13	774
Abschnitt 14	776
 IV Differentialrechnung	 778
Abschnitt 1	778
Abschnitt 2	778
Abschnitt 3	787
 V Integralrechnung	 801
Abschnitt 1 bis 7	801
Abschnitt 8	803
Abschnitt 9	812
Abschnitt 10	813

VI Potenzreihenentwicklungen	821
Abschnitt 1	821
Abschnitt 2	824
Abschnitt 3	825
VII Komplexe Zahlen und Funktionen	836
Abschnitt 1	836
Abschnitt 2	838
Abschnitt 3	843
Abschnitt 4	846
Literaturhinweise	849
Sachwortverzeichnis	850