

Inhaltsverzeichnis

I Allgemeine Grundlagen aus Algebra, Arithmetik und Geometrie	1
1 Grundlegende Begriffe über Mengen	1
1.1 Definition und Darstellung einer Menge	1
1.2 Mengenoperationen	2
2 Rechnen mit reellen Zahlen	2
2.1 Reelle Zahlen und ihre Eigenschaften	2
2.1.1 Natürliche und ganze Zahlen	2
2.1.2 Rationale, irrationale und reelle Zahlen	4
2.1.3 Rundungsregeln für reelle Zahlen	5
2.1.4 Darstellung der reellen Zahlen auf der Zahlengerade	5
2.1.5 Grundrechenarten	6
2.2 Zahlensysteme	7
2.3 Intervalle	8
2.4 Bruchrechnung	8
2.5 Potenzen und Wurzeln	10
2.6 Logarithmen	12
2.7 Binomischer Lehrsatz	14
3 Elementare (endliche) Reihen	16
3.1 Definition einer (endlichen) Reihe	16
3.2 Arithmetische Reihen	16
3.3 Geometrische Reihen	16
3.4 Spezielle Zahlenreihen	16
4 Gleichungen mit einer Unbekannten	17
4.1 Algebraische Gleichungen n -ten Grades	17
4.1.1 Allgemeine Vorbetrachtungen	17
4.1.2 Lineare Gleichungen	18
4.1.3 Quadratische Gleichungen	18
4.1.4 Kubische Gleichungen	18
4.1.5 Biquadratische Gleichungen	20
4.2 Allgemeine Lösungshinweise für Gleichungen	21
4.3 Graphisches Lösungsverfahren	22
4.4 Regula falsi	23
4.5 Tangentenverfahren von Newton	24
5 Ungleichungen mit einer Unbekannten	25

6	Lehrsätze aus der elementaren Geometrie	26
6.1	Satz des Pythagoras	26
6.2	Höhensatz	26
6.3	Kathetensatz (Euklid)	27
6.4	Satz des Thales	27
6.5	Strahlensätze	27
6.6	Sinussatz	28
6.7	Kosinussatz	28
7	Ebene geometrische Körper (Planimetrie)	28
7.1	Dreiecke	28
7.1.1	Allgemeine Beziehungen	28
7.1.2	Spezielle Dreiecke	29
7.1.2.1	Rechtwinkliges Dreieck	29
7.1.2.2	Gleichschenkliges Dreieck	29
7.1.2.3	Gleichseitiges Dreieck	30
7.2	Quadrat	30
7.3	Rechteck	30
7.4	Parallelogramm	31
7.5	Rhombus oder Raute	31
7.6	Trapez	31
7.7	Reguläres n -Eck	32
7.8	Kreis	32
7.9	Kreis Sektor oder Kreisausschnitt	32
7.10	Kreis segment oder Kreisabschnitt	32
7.11	Kreisring	33
7.12	Ellipse	33
8	Räumliche geometrische Körper (Stereometrie)	33
8.1	Prisma	33
8.2	Würfel	34
8.3	Quader	34
8.4	Pyramide	34
8.5	Pyramidenstumpf	35
8.6	Tetraeder oder dreiseitige Pyramide	35
8.7	Keil	36
8.8	Gerader Kreiszylinder	36
8.9	Gerader Kreiskegel	36
8.10	Gerader Kreiskegelstumpf	37
8.11	Kugel	37
8.12	Kugelausschnitt oder Kugelsektor	37
8.13	Kugelschicht oder Kugelzone	38
8.14	Kugelabschnitt, Kugelsegment, Kugelkappe oder Kalotte	38
8.15	Ellipsoid	38
8.16	Rotationsparaboloid	39
8.17	Tonne oder Fass	39
8.18	Torus	40
8.19	Guldinsche Regeln für Rotationskörper	40

9	Koordinatensysteme	41
9.1	Ebene Koordinatensysteme	41
9.1.1	Rechtwinklige oder kartesische Koordinaten	41
9.1.2	Polarkoordinaten	42
9.1.3	Koordinatentransformationen	42
9.1.3.1	Parallelverschiebung eines kartesischen Koordinatensystems	42
9.1.3.2	Zusammenhang zwischen den kartesischen und den Polarkoordinaten	42
9.1.3.3	Drehung eines kartesischen Koordinatensystems	43
9.2	Räumliche Koordinatensysteme	44
9.2.1	Rechtwinklige oder kartesische Koordinaten	44
9.2.2	Zylinderkoordinaten	44
9.2.3	Zusammenhang zwischen den kartesischen und den Zylinderkoordinaten	44
9.2.4	Kugelkoordinaten	45
9.2.5	Zusammenhang zwischen den kartesischen und den Kugelkoordinaten	45
II	Vektorrechnung	46
1	Grundbegriffe	46
1.1	Vektoren und Skalare	46
1.2	Spezielle Vektoren	46
1.3	Gleichheit von Vektoren	47
1.4	Kollineare, parallele und antiparallele Vektoren, inverser Vektor	47
2	Komponentendarstellung eines Vektors	48
2.1	Komponentendarstellung in einem kartesischen Koordinatensystem	48
2.2	Komponentendarstellung spezieller Vektoren	48
2.3	Betrag und Richtungswinkel eines Vektors	49
3	Vektoroperationen	50
3.1	Addition und Subtraktion von Vektoren	50
3.2	Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	51
3.3	Skalarprodukt (inneres Produkt)	51
3.4	Vektorprodukt (äußeres Produkt, Kreuzprodukt)	53
3.5	Spatprodukt (gemischtes Produkt)	55
3.6	Formeln für Mehrfachprodukte	56
4	Anwendungen	56
4.1	Arbeit einer konstanten Kraft	56
4.2	Vektorielle Darstellung einer Geraden	57
4.2.1	Punkt-Richtungs-Form	57
4.2.2	Zwei-Punkte-Form	57
4.2.3	Abstand eines Punktes von einer Geraden	58

4.2.4	Abstand zweier paralleler Geraden	58
4.2.5	Abstand zweier windschiefer Geraden	59
4.2.6	Schnittpunkt und Schnittwinkel zweier Geraden	60
4.3	Vektorielle Darstellung einer Ebene	60
4.3.1	Punkt-Richtungs-Form	60
4.3.2	Drei-Punkte-Form	61
4.3.3	Ebene senkrecht zu einem Vektor	62
4.3.4	Abstand eines Punktes von einer Ebene	62
4.3.5	Abstand einer Geraden von einer Ebene	63
4.3.6	Abstand zweier paralleler Ebenen	64
4.3.7	Schnittpunkt und Schnittwinkel einer Geraden mit einer Ebene ..	65
4.3.8	Schnittwinkel zweier Ebenen	66
4.3.9	Schnittgerade zweier Ebenen	66
III Funktionen und Kurven		67
1 Grundbegriffe		67
1.1	Definition einer Funktion	67
1.2	Darstellungsformen einer Funktion	67
1.2.1	Analytische Darstellung	67
1.2.2	Parameterdarstellung	67
1.2.3	Kurvengleichung in Polarkoordinaten	68
1.2.4	Graphische Darstellung	68
2 Allgemeine Funktionseigenschaften		68
2.1	Nullstellen	68
2.2	Symmetrie	69
2.3	Monotonie	69
2.4	Periodizität	70
2.5	Umkehrfunktion (inverse Funktion)	70
3 Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion		71
3.1	Grenzwert einer Folge	71
3.2	Grenzwert einer Funktion	72
3.2.1	Grenzwert für $x \rightarrow x_0$	72
3.2.2	Grenzwert für $x \rightarrow \pm \infty$	72
3.3	Rechenregeln für Grenzwerte	72
3.4	Grenzwertregel von Bernoulli und de l'Hospital	73
3.5	Stetigkeit einer Funktion	74
4 Ganzrationale Funktionen (Polynomfunktionen)		76
4.1	Definition der ganzrationalen Funktionen (Polynomfunktionen)	76
4.2	Lineare Funktionen (Geraden)	76
4.2.1	Allgemeine Geradengleichung	76
4.2.2	Hauptform einer Geraden	76
4.2.3	Punkt-Steigungs-Form einer Geraden	76
4.2.4	Zwei-Punkte-Form einer Geraden	77

4.2.5	Achsenabschnittsform einer Geraden	77
4.2.6	Hessesche Normalform einer Geraden	77
4.2.7	Abstand eines Punktes von einer Geraden	77
4.2.8	Schnittwinkel zweier Geraden	78
4.3	Quadratische Funktionen (Parabeln)	78
4.3.1	Hauptform einer Parabel	78
4.3.2	Produktform einer Parabel	79
4.3.3	Scheitelpunktsform einer Parabel	79
4.4	Polynomfunktionen höheren Grades (n -ten Grades)	79
4.4.1	Abspaltung eines Linearfaktors	79
4.4.2	Nullstellen einer Polynomfunktion	79
4.4.3	Produktdarstellung einer Polynomfunktion	79
4.5	Horner-Schema	80
4.6	Reduzierung einer Polynomfunktion (Nullstellenberechnung)	81
4.7	Interpolationspolynome	82
4.7.1	Allgemeine Vorbetrachtungen	82
4.7.2	Interpolationsformel von Lagrange	82
4.7.3	Interpolationsformel von Newton	84
5	Gebrochenrationale Funktionen	86
5.1	Definition der gebrochenrationalen Funktionen	86
5.2	Nullstellen, Definitionslücken, Pole	87
5.3	Asymptotisches Verhalten im Unendlichen	88
6	Potenz- und Wurzelfunktionen	88
6.1	Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten	88
6.2	Wurzelfunktionen	90
6.3	Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten	90
7	Trigonometrische Funktionen	91
7.1	Winkelmaße	91
7.2	Definition der trigonometrischen Funktionen	92
7.3	Sinus- und Kosinusfunktion	93
7.4	Tangens- und Kotangensfunktion	94
7.5	Wichtige Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen	94
7.6	Trigonometrische Formeln	95
7.6.1	Additionstheoreme	95
7.6.2	Formeln für halbe Winkel	96
7.6.3	Formeln für Winkelvielfache	96
7.6.4	Formeln für Potenzen	97
7.6.5	Formeln für Summen und Differenzen	97
7.6.6	Formeln für Produkte	98
7.7	Anwendungen in der Schwingungslehre	98
7.7.1	Allgemeine Sinus- und Kosinusfunktion	98
7.7.2	Harmonische Schwingungen (Sinusschwingungen)	99
7.7.2.1	Gleichung einer harmonischen Schwingung	99
7.7.2.2	Darstellung einer harmonischen Schwingung im Zeigerdiagramm	99

7.7.3	Superposition (Überlagerung) gleichfrequenter harmonischer Schwingungen	100
8	Arkusfunktionen	101
8.1	Arkussinus- und Arkuskosinusfunktion	101
8.2	Arkustangens- und Arkuskotangensfunktion	102
8.3	Wichtige Beziehungen zwischen den Arkusfunktionen	103
9	Exponentialfunktionen	104
9.1	Definition der Exponentialfunktionen	104
9.2	Spezielle Exponentialfunktionen aus den Anwendungen	105
9.2.1	Abklingfunktion	105
9.2.2	Sättigungsfunktion	105
9.2.3	Wachstumsfunktion	106
9.2.4	Gauß-Funktion (Gaußsche Glockenkurve)	106
9.2.5	Kettenlinie	106
10	Logarithmusfunktionen	107
10.1	Definition der Logarithmusfunktionen	107
10.2	Spezielle Logarithmusfunktionen	107
11	Hyperbelfunktionen	108
11.1	Definition der Hyperbelfunktionen	108
11.2	Wichtige Beziehungen zwischen den Hyperbelfunktionen	109
11.3	Formeln	110
11.3.1	Additionstheoreme	110
11.3.2	Formeln für halbe Argumente	110
11.3.3	Formeln für Vielfache des Arguments	111
11.3.4	Formeln für Potenzen	111
11.3.5	Formeln für Summen und Differenzen	112
11.3.6	Formeln für Produkte	112
11.3.7	Formel von Moivre	112
12	Areafunktionen	113
12.1	Definition der Areafunktionen	113
12.2	Wichtige Beziehungen zwischen den Areafunktionen	114
13	Kegelschnitte	115
13.1	Allgemeine Gleichung eines Kegelschnittes	115
13.2	Kreis	115
13.2.1	Geometrische Definition	115
13.2.2	Mittelpunktsgleichung eines Kreises (Ursprungsgleichung)	116
13.2.3	Kreis in allgemeiner Lage (Hauptform, verschobener Kreis)	116
13.2.4	Gleichung eines Kreises in Polarkoordinaten	116
13.2.5	Parameterdarstellung eines Kreises	116

13.3	Ellipse	117
13.3.1	Geometrische Definition	117
13.3.2	Mittelpunktsgleichung einer Ellipse (Ursprungsgleichung)	117
13.3.3	Ellipse in allgemeiner Lage (Hauptform, verschobene Ellipse)	117
13.3.4	Gleichung einer Ellipse in Polarkoordinaten	118
13.3.5	Parameterdarstellung einer Ellipse	118
13.4	Hyperbel	119
13.4.1	Geometrische Definition	119
13.4.2	Mittelpunktsgleichung einer Hyperbel (Ursprungsgleichung)	119
13.4.3	Hyperbel in allgemeiner Lage (Hauptform, verschobene Hyperbel)	119
13.4.4	Gleichung einer Hyperbel in Polarkoordinaten	120
13.4.5	Parameterdarstellung einer Hyperbel	121
13.4.6	Gleichung einer um 90° gedrehten Hyperbel	121
13.4.7	Gleichung einer gleichseitigen oder rechtwinkligen Hyperbel ($a = b$)	121
13.5	Parabel	122
13.5.1	Geometrische Definition	122
13.5.2	Scheitelgleichung einer Parabel	122
13.5.3	Parabel in allgemeiner Lage (Hauptform, verschobene Parabel)	122
13.5.4	Gleichung einer Parabel in Polarkoordinaten	123
13.5.5	Parameterdarstellung einer Parabel	123
14	Spezielle Kurven	124
14.1	Gewöhnliche Zykloide (Rollkurve)	124
14.2	Epizykloide	124
14.3	Hypozykloide	125
14.4	Astroide (Sternkurve)	126
14.5	Kardioide (Herzkurve)	126
14.6	Lemniskate (Schleifenkurve)	127
14.7	Strophoide	127
14.8	Cartesisches Blatt	128
14.9	„Kleeblatt“ mit n bzw. $2n$ Blättern	128
14.10	Spiralen	129
14.10.1	Archimedische Spirale	129
14.10.2	Logarithmische Spirale	129
IV	Differentialrechnung	130
1	Differenzierbarkeit einer Funktion	130
1.1	Differenzenquotient	130
1.2	Differentialquotient oder 1. Ableitung	130
1.3	Ableitungsfunktion	130
1.4	Höhere Ableitungen	131
1.5	Differential einer Funktion	131
2	Erste Ableitung der elementaren Funktionen (Tabelle)	132

3 Ableitungsregeln 133

3.1 Faktorregel 133

3.2 Summenregel 133

3.3 Produktregel 133

3.4 Quotientenregel 134

3.5 Kettenregel 134

3.6 Logarithmische Differentiation 136

3.7 Ableitung der Umkehrfunktion 136

3.8 Implizite Differentiation 137

3.9 Ableitungen einer in der Parameterform dargestellten Funktion (Kurve) ... 137

3.10 Ableitungen einer in Polarkoordination dargestellten Kurve 138

4 Anwendungen der Differentialrechnung 138

4.1 Geschwindigkeit und Beschleunigung einer geradlinigen Bewegung 138

4.2 Tangente und Normale 139

4.3 Linearisierung einer Funktion 139

4.4 Monotonie und Krümmung einer Kurve 140

4.4.1 Geometrische Deutung der 1. und 2. Ableitung 140

4.4.2 Krümmung einer ebenen Kurve 141

4.5 Relative Extremwerte (relative Maxima, relative Minima) 142

4.6 Wendepunkte, Sattelpunkte 144

4.7 Kurvendiskussion 145

V Integralrechnung 147

1 Bestimmtes Integral 147

1.1 Definition eines bestimmten Integrals 147

1.2 Berechnung eines bestimmten Integrals 148

1.3 Elementare Integrationsregeln für bestimmte Integrale 149

2 Unbestimmtes Integral 150

2.1 Definition eines unbestimmten Integrals 150

2.2 Allgemeine Eigenschaften der unbestimmten Integrale 150

2.3 Tabelle der Grund- oder Stammintegrale 152

3 Integrationsmethoden 153

3.1 Integration durch Substitution 153

3.1.1 Allgemeines Verfahren 153

3.1.2 Spezielle Integralsubstitutionen (Tabelle) 154

3.2 Partielle Integration (Produktintegration)..... 156

3.3 Integration einer gebrochenrationalen Funktion durch Partialbruchzerlegung des Integranden 157

3.3.1 Partialbruchzerlegung 157

3.3.2 Integration der Partialbrüche 160

3.4 Integration durch Potenzreihenentwicklung des Integranden 161

3.5 Numerische Integration 161

3.5.1 Trapezformel 161

3.5.2 Simpsonsche Formel 162

3.5.3 Romberg-Verfahren 164

4 Uneigentliche Integrale 167

4.1 Unendliches Integrationsintervall 167

4.2 Integrand mit einer Unendlichkeitsstelle (Pol)..... 167

5 Anwendungen der Integralrechnung 168

5.1 Integration der Bewegungsgleichung 168

5.2 Arbeit einer ortsabhängigen Kraft (Arbeitsintegral) 169

5.3 Lineare und quadratische Mittelwerte einer Funktion 169

5.3.1 Linearer Mittelwert 169

5.3.2 Quadratischer Mittelwert 169

5.3.3 Zeitliche Mittelwerte einer periodischen Funktion 169

5.4 Flächeninhalt 170

5.5 Schwerpunkt einer homogenen ebenen Fläche 171

5.6 Flächenträgheitsmomente (Flächenmomente 2. Grades) 172

5.7 Bogenlänge einer ebenen Kurve 173

5.8 Volumen eines Rotationskörpers (Rotationsvolumen)..... 173

5.9 Mantelfläche eines Rotationskörpers (Rotationsfläche) 175

5.10 Schwerpunkt eines homogenen Rotationskörpers 175

5.11 Massenträgheitsmoment eines homogenen Körpers 176

VI Unendliche Reihen, Taylor- und Fourier-Reihen 178

1 Unendliche Reihen 178

1.1 Grundbegriffe 178

1.1.1 Definition einer unendlichen Reihe 178

1.1.2 Konvergenz und Divergenz einer unendlichen Reihe 178

1.2 Konvergenzkriterien 179

1.2.1 Quotientenkriterium 179

1.2.2 Wurzelkriterium 180

1.2.3 Vergleichskriterien 180

1.2.4 Leibnizsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen 181

1.2.5 Eigenschaften konvergenter bzw. absolut konvergenter Reihen ... 181

1.3 Spezielle konvergente Reihen 181

2 Potenzreihen 182

2.1 Definition einer Potenzreihe 182

2.2 Konvergenzradius und Konvergenzbereich einer Potenzreihe 183

2.3 Wichtige Eigenschaften der Potenzreihen 183

3 Taylor-Reihen 184

3.1 Taylorsche und Mac Laurinsche Formel 184

3.1.1 Taylorsche Formel 184

3.1.2 Mac Laurinsche Formel 184

3.2 Taylorsche Reihe 185

3.3 Mac Laurinsche Reihe 185

3.4 Spezielle Potenzreihenentwicklungen (Tabelle) 186

3.5 Näherungspolynome einer Funktion (mit Tabelle) 188

4	Fourier-Reihen	190
4.1	Fourier-Reihe einer periodischen Funktion	190
4.2	Fourier-Zerlegung einer nichtsinusförmigen Schwingung	193
4.3	Spezielle Fourier-Reihen (Tabelle)	195
VII	Lineare Algebra	198
1	Reelle Matrizen	198
1.1	Grundbegriffe	198
1.1.1	n -dimensionale Vektoren	198
1.1.2	Definition einer reellen Matrix	200
1.1.3	Spezielle Matrizen	201
1.1.4	Gleichheit von Matrizen	201
1.2	Spezielle quadratische Matrizen	201
1.2.1	Diagonalmatrix	202
1.2.2	Einheitsmatrix	202
1.2.3	Dreiecksmatrix	202
1.2.4	Symmetrische Matrix	202
1.2.5	Schiefsymmetrische Matrix	202
1.2.6	Orthogonale Matrix	203
1.3	Rechenoperationen für Matrizen	203
1.3.1	Addition und Subtraktion von Matrizen	203
1.3.2	Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar	203
1.3.3	Multiplikation von Matrizen	204
1.4	Reguläre Matrix	205
1.5	Inverse Matrix	205
1.5.1	Definition einer inversen Matrix	205
1.5.2	Berechnung einer inversen Matrix	206
1.5.2.1	Berechnung der inversen Matrix A^{-1} unter Verwendung von Unterdeterminanten	206
1.5.2.2	Berechnung der inversen Matrix A^{-1} nach dem Gaußschen Algorithmus (Gauß-Jordan-Verfahren)	206
1.6	Rang einer Matrix	207
1.6.1	Definitionen	207
1.6.1.1	Unterdeterminanten einer Matrix	207
1.6.1.2	Rang einer Matrix	207
1.6.1.3	Elementare Umformungen einer Matrix	207
1.6.2	Rangbestimmung einer Matrix	208
1.6.2.1	Rangbestimmung einer (m, n) -Matrix A unter Verwendung von Unterdeterminanten	208
1.6.2.2	Rangbestimmung einer (m, n) -Matrix A mit Hilfe elementarer Umformungen	208
2	Determinanten	209
2.1	Zweireihige Determinanten	209
2.2	Dreireihige Determinanten	210
2.3	Determinanten höherer Ordnung	211
2.3.1	Unterdeterminante D_{ik}	211
2.3.2	Algebraisches Komplement (Adjunkte) A_{ik}	211
2.3.3	Definition einer n -reihigen Determinante	211

2.4	Laplacescher Entwicklungssatz	212
2.5	Rechenregeln für n -reihige Determinanten	212
2.6	Regeln zur praktischen Berechnung einer n -reihigen Determinante	214
2.6.1	Elementare Umformungen einer n -reihigen Determinante	214
2.6.2	Reduzierung und Berechnung einer n -reihigen Determinante	214
3	Lineare Gleichungssysteme	215
3.1	Grundbegriffe	215
3.1.1	Definition eines linearen Gleichungssystems	215
3.1.2	Spezielle lineare Gleichungssysteme	215
3.2	Lösungsverhalten eines linearen (m, n) -Gleichungssystems	216
3.2.1	Kriterium für die Lösbarkeit eines linearen (m, n) -Systems $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$	216
3.2.2	Lösungsmenge eines linearen (m, n) -Systems $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$	216
3.3	Lösungsverhalten eines quadratischen linearen Gleichungssystems	217
3.4	Lösungsverfahren für ein lineares Gleichungssystem nach Gauß (Gaußscher Algorithmus)	218
3.4.1	Äquivalente Umformungen eines linearen (m, n) -Systems	218
3.4.2	Gaußscher Algorithmus	218
3.5	Cramersche Regel	221
3.6	Lineare Unabhängigkeit von Vektoren	221
4	Komplexe Matrizen	222
4.1	Definition einer komplexen Matrix	222
4.2	Rechenoperationen und Rechenregeln für komplexe Matrizen	223
4.3	Konjugiert komplexe Matrix	223
4.4	Konjugiert transponierte Matrix	224
4.5	Spezielle komplexe Matrizen	224
4.5.1	Hermiteische Matrix	224
4.5.2	Schiefhermitesche Matrix	224
4.5.3	Unitäre Matrix	225
5	Eigenwertprobleme	225
5.1	Eigenwerte und Eigenvektoren einer quadratischen Matrix	225
5.2	Eigenwerte und Eigenvektoren spezieller n -reihiger Matrizen	227
VIII	Komplexe Zahlen und Funktionen	228
1	Darstellungsformen einer komplexen Zahl	228
1.1	Algebraische oder kartesische Form	228
1.2	Polarformen	229
1.2.1	Trigonometrische Form	229
1.2.2	Exponentialform	229
1.3	Umrechnungen zwischen den Darstellungsformen	230
1.3.1	Polarform $\rightarrow$ Kartesische Form	230
1.3.2	Kartesische Form $\rightarrow$ Polarform	230

2 Grundrechenarten für komplexe Zahlen 231

2.1 Addition und Subtraktion komplexer Zahlen 231

2.2 Multiplikation komplexer Zahlen 231

2.3 Division komplexer Zahlen 232

3 Potenzieren 233

4 Radizieren (Wurzelziehen) 234

5 Natürlicher Logarithmus einer komplexen Zahl 235

6 Ortskurven 236

6.1 Komplexwertige Funktion einer reellen Variablen 236

6.2 Ortskurve einer parameterabhängigen komplexen Zahl 236

6.3 Inversion einer Ortskurve 237

7 Komplexe Funktionen 238

7.1 Definition einer komplexen Funktion 238

7.2 Definitionsgleichungen einiger elementarer Funktionen 238

7.2.1 Trigonometrische Funktionen 238

7.2.2 Hyperbelfunktionen 238

7.2.3 Exponentialfunktion (e-Funktion) 239

7.3 Wichtige Beziehungen und Formeln 239

7.3.1 Eulersche Formeln 239

7.3.2 Zusammenhang zwischen den trigonometrischen Funktionen
und der komplexen e-Funktion 239

7.3.3 Trigonometrische und Hyperbelfunktionen mit imaginärem
Argument 239

7.3.4 Additionstheoreme der trigonometrischen und Hyperbelfunktionen
für komplexes Argument 239

7.3.5 Arkus- und Areafunktionen mit imaginärem Argument 240

8 Anwendungen in der Schwingungslehre 240

8.1 Darstellung einer harmonischen Schwingung durch einen rotierenden
komplexen Zeiger 240

8.2 Ungestörte Überlagerung gleichfrequenter harmonischer Schwingungen
(„Superpositionsprinzip“) 241

**IX Differential- und Integralrechnung für Funktionen
von mehreren Variablen** 243

1 Funktionen von mehreren Variablen und ihre Darstellung 243

1.1 Definition einer Funktion von mehreren Variablen 243

1.2 Darstellungsformen einer Funktion von zwei Variablen 243

1.2.1 Analytische Darstellung 243

1.2.2 Graphische Darstellung 244

1.2.2.1 Darstellung einer Funktion als Fläche im Raum 244

1.2.2.2 Schnittkurvendiagramme 244

1.2.2.3 Höhenliniendiagramm 244

1.3	Spezielle Flächen (Funktionen)	245
1.3.1	Ebenen	245
1.3.2	Rotationsflächen	245
1.3.2.1	Gleichung einer Rotationsfläche	245
1.3.2.2	Spezielle Rotationsflächen	246
2	Partielle Differentiation	247
2.1	Partielle Ableitungen 1. Ordnung	247
2.1.1	Partielle Ableitungen 1. Ordnung von $z = f(x; y)$	247
2.1.2	Partielle Ableitungen 1. Ordnung von $y = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$	248
2.2	Partielle Ableitungen höherer Ordnung	249
2.3	Verallgemeinerte Kettenregel (Differentiation nach einem Parameter)	250
2.4	Totales oder vollständiges Differential einer Funktion	251
2.5	Anwendungen	253
2.5.1	Linearisierung einer Funktion	253
2.5.2	Relative Extremwerte (relative Maxima, relative Minima)	254
2.5.3	Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen (Lagrangesches Multiplikatorverfahren)	255
3	Mehrfachintegrale	257
3.1	Doppelintegrale	257
3.1.1	Definition eines Doppelintegrals	257
3.1.2	Berechnung eines Doppelintegrals in kartesischen Koordinaten ..	258
3.1.3	Berechnung eines Doppelintegrals in Polarkoordinaten	260
3.1.4	Anwendungen	261
3.1.4.1	Flächeninhalt	261
3.1.4.2	Schwerpunkt einer homogenen ebenen Fläche	261
3.1.4.3	Flächenträgheitsmomente (Flächenmomente 2. Grades)	262
3.2	Dreifachintegrale	263
3.2.1	Definition eines Dreifachintegrals	263
3.2.2	Berechnung eines Dreifachintegrals in kartesischen Koordinaten	264
3.2.3	Berechnung eines Dreifachintegrals in Zylinderkoordinaten	266
3.2.4	Berechnung eines Dreifachintegrals in Kugelkoordinaten	266
3.2.5	Anwendungen	267
3.2.5.1	Volumen eines zylindrischen Körpers	267
3.2.5.2	Schwerpunkt eines homogenen Körpers	268
3.2.5.3	Massenträgheitsmoment eines homogenen Körpers	269
X	Gewöhnliche Differentialgleichungen	270
1	Grundbegriffe	270
1.1	Definition einer gewöhnlichen Differentialgleichung n -ter Ordnung	270
1.2	Lösungen einer Differentialgleichung	270
1.3	Anfangswertprobleme	270
1.4	Randwertprobleme	271

2 Differentialgleichungen 1. Ordnung 271

2.1 Differentialgleichungen 1. Ordnung mit trennbaren Variablen 271

2.2 Spezielle Differentialgleichungen 1. Ordnung, die durch Substitutionen lösbar sind (Tabelle) 272

2.3 Exakte Differentialgleichungen 1. Ordnung 273

2.4 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung 274

2.4.1 Definition einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung 274

2.4.2 Integration der homogenen linearen Differentialgleichung 274

2.4.3 Integration der inhomogenen linearen Differentialgleichung 274

2.4.3.1 Integration durch Variation der Konstanten 274

2.4.3.2 Integration durch Aufsuchen einer partikulären Lösung 275

2.4.4 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten 275

2.5 Numerische Integration einer Differentialgleichung 1. Ordnung 277

2.5.1 Streckenzugverfahren von Euler 277

2.5.2 Runge-Kutta-Verfahren 2. Ordnung 279

2.5.3 Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung 280

3 Differentialgleichungen 2. Ordnung 283

3.1 Spezielle Differentialgleichungen 2. Ordnung, die sich auf Differentialgleichungen 1. Ordnung zurückführen lassen 283

3.2 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten .. 284

3.2.1 Definition einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten 284

3.2.2 Integration der homogenen linearen Differentialgleichung 284

3.2.2.1 Wronski-Determinante 284

3.2.2.2 Allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung 284

3.2.3 Integration der inhomogenen linearen Differentialgleichung 285

3.3 Numerische Integration einer Differentialgleichung 2. Ordnung 288

4 Anwendungen 291

4.1 Mechanische Schwingungen 291

4.1.1 Allgemeine Schwingungsgleichung der Mechanik 291

4.1.2 Freie ungedämpfte Schwingung 291

4.1.3 Freie gedämpfte Schwingung 292

4.1.3.1 Schwache Dämpfung (Schwingungsfall) 292

4.1.3.2 Aperiodischer Grenzfall 293

4.1.3.3 Aperiodisches Verhalten bei starker Dämpfung (Kriechfall) 293

4.1.4 Erzwungene Schwingung 294

4.1.4.1 Differentialgleichung der erzwungenen Schwingung ... 294

4.1.4.2 Stationäre Lösung 294

4.2 Elektrische Schwingungen in einem Reihenschwingkreis 295

5 Lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten .. 296

5.1 Definition einer linearen Differentialgleichung n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten 296

5.2	Integration der homogenen linearen Differentialgleichung	296
5.2.1	Wronski-Determinante	296
5.2.2	Allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung	297
5.3	Integration der inhomogenen linearen Differentialgleichung	298
6	Systeme linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	300
6.1	Grundbegriffe	300
6.2	Integration des homogenen linearen Systems	300
6.3	Integration des inhomogenen linearen Systems	301
6.3.1	Integration durch Aufsuchen einer partikulären Lösung	301
6.3.2	Einsetzungs- oder Eliminationsverfahren	302
XI	Fehler- und Ausgleichsrechnung	304
1	Gaußsche Normalverteilung	304
2	Auswertung einer Messreihe	305
3	Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz	308
3.1	Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz für eine Funktion von zwei unabhängigen Variablen	308
3.2	Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz für eine Funktion von n unabhängigen Variablen	310
4	Lineares Fehlerfortpflanzungsgesetz	310
5	Ausgleichskurven	312
5.1	Ausgleichung nach dem Gaußschen Prinzip der kleinsten Quadrate	312
5.2	Ausgleichs- oder Regressionsgerade	313
5.3	Ausgleichs- oder Regressionsparabel	315
XII	Fourier-Transformationen	316
1	Grundbegriffe	316
2	Spezielle Fourier-Transformationen	321
3	Wichtige „Hilfsfunktionen“ in den Anwendungen	323
3.1	Sprungfunktionen	323
3.2	Rechteckige Impulse	325
3.3	Diracsche Deltafunktion	326
4	Eigenschaften der Fourier-Transformation (Transformationssätze)	329
4.1	Linearitätssatz (Satz über Linearkombinationen)	329
4.2	Ähnlichkeitssatz	329
4.3	Verschiebungssatz (Zeitverschiebungssatz)	330
4.4	Dämpfungssatz (Frequenzverschiebungssatz)	331

4.5 Ableitungssätze (Differentiationssätze) 332

4.5.1 Ableitungssatz (Differentiationssatz) für die Originalfunktion 332

4.5.2 Ableitungssatz (Differentiationssatz) für die Bildfunktion 333

4.6 Integrationssätze 334

4.7 Faltungssatz 334

4.8 Vertauschungssatz 335

5 Anwendung: Lösung linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten 336

5.1 Allgemeines Lösungsverfahren 336

5.2 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten .. 336

5.3 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten .. 337

6 Tabellen spezieller Fourier-Transformationen 338

XIII Laplace-Transformationen 344

1 Grundbegriffe 344

2 Eigenschaften der Laplace-Transformation (Transformationssätze) 345

2.1 Linearitätssatz (Satz über Linearkombinationen) 345

2.2 Ähnlichkeitssatz 346

2.3 Verschiebungssätze 347

2.4 Dämpfungssatz 348

2.5 Ableitungssätze (Differentiationssätze) 348

2.5.1 Ableitungssatz (Differentiationssatz) für die Originalfunktion 348

2.5.2 Ableitungssatz (Differentiationssatz) für die Bildfunktion..... 350

2.6 Integrationssätze 350

2.6.1 Integrationssatz für die Originalfunktion 350

2.6.2 Integrationssatz für die Bildfunktion 351

2.7 Faltungssatz 352

2.8 Grenzwertsätze 353

3 Laplace-Transformierte einer periodischen Funktion 354

4 Laplace-Transformierte spezieller Funktionen (Impulse) 355

5 Anwendung: Lösung linearer Anfangswertprobleme 360

5.1 Allgemeines Lösungsverfahren 360

5.2 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten .. 361

5.3 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten .. 362

6 Tabelle spezieller Laplace-Transformationen 363

XIV Vektoranalysis	368
1 Ebene und räumliche Kurven	368
1.1 Vektorielle Darstellung einer Kurve	368
1.2 Differentiation eines Vektors nach einem Parameter	369
1.2.1 Ableitung einer Vektorfunktion	369
1.2.2 Tangentenvektor	369
1.2.3 Ableitungsregeln für Summen und Produkte	369
1.2.4 Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor eines Massenpunktes	370
1.3 Bogenlänge einer Kurve	371
1.4 Tangenten- und Hauptnormaleneinheitsvektor einer Kurve	371
1.5 Krümmung einer Kurve	372
2 Flächen im Raum	374
2.1 Vektorielle Darstellung einer Fläche	374
2.2 Flächenkurven	375
2.3 Flächennormale und Flächenelement	375
2.4 Tangentialebene	376
2.4.1 Tangentialebene einer Fläche vom Typ $\vec{r} = \vec{r}(u; v)$	376
2.4.2 Tangentialebene einer Fläche vom Typ $z = f(x; y)$	377
2.4.3 Tangentialebene einer Fläche vom Typ $F(x; y; z) = 0$	377
3 Skalar- und Vektorfelder	378
3.1 Skalarfelder	378
3.2 Vektorfelder	378
4 Gradient eines Skalarfeldes	380
5 Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes	382
5.1 Divergenz eines Vektorfeldes	382
5.2 Rotation eines Vektorfeldes	383
5.3 Spezielle Vektorfelder	384
6 Darstellung von Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace-Operator in speziellen Koordinatensystemen	385
6.1 Darstellung in Polarkoordinaten	385
6.2 Darstellung in Zylinderkoordinaten	387
6.3 Darstellung in Kugelkoordinaten	390
7 Linien- oder Kurvenintegrale	392
7.1 Linienintegral in der Ebene	392
7.2 Linienintegral im Raum	394
7.3 Wegunabhängigkeit eines Linien- oder Kurvenintegrals	394
7.4 Konservative Vektorfelder	395
7.5 Arbeitsintegral (Arbeit eines Kraftfeldes)	396

8	Oberflächenintegrale	397
8.1	Definition eines Oberflächenintegrals	397
8.2	Berechnung eines Oberflächenintegrals	398
8.2.1	Berechnung eines Oberflächenintegrals in symmetriegerechten Koordinaten	398
8.2.2	Berechnung eines Oberflächenintegrals unter Verwendung von Flächenparametern	399
9	Integralsätze von Gauß und Stokes	400
9.1	Gaußscher Integralsatz	400
9.2	Stokesscher Integralsatz	401
XV	Wahrscheinlichkeitsrechnung	403
1	Hilfsmittel aus der Kombinatorik	403
1.1	Permutationen	403
1.2	Kombinationen	404
1.3	Variationen	404
2	Grundbegriffe	405
3	Wahrscheinlichkeit	407
3.1	Absolute und relative Häufigkeit	407
3.2	Wahrscheinlichkeitsaxiome von Kolmogoroff	408
3.3	Laplace-Experimente	408
3.4	Bedingte Wahrscheinlichkeit	409
3.5	Multiplikationssatz	409
3.6	Stochastisch unabhängige Ereignisse	410
3.7	Mehrstufige Zufallsexperimente	410
4	Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen	412
4.1	Zufallsvariable	412
4.2	Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen	413
4.3	Kennwerte oder Maßzahlen einer Verteilung	415
5	Spezielle diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen	417
5.1	Binomialverteilung	417
5.2	Hypergeometrische Verteilung	419
5.3	Poisson-Verteilung	421
5.4	Approximationen diskreter Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Tabelle)	422
6	Spezielle stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen	423
6.1	Gaußsche Normalverteilung	423
6.1.1	Allgemeine Normalverteilung	423
6.1.2	Standardnormalverteilung	424

6.1.3	Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der tabellierten Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung	425
6.1.4	Quantile der Standardnormalverteilung	426
6.2	Exponentialverteilung	427
6.3	Weibull-Verteilung	428
7	Wahrscheinlichkeitsverteilungen von mehreren Zufallsvariablen	429
7.1	Mehrdimensionale Zufallsvariable	429
7.2	Summen, Linearkombinationen und Produkte von Zufallsvariablen	431
7.2.1	Additionssätze für Mittelwerte und Varianzen	431
7.2.2	Multiplikationssatz für Mittelwerte	432
7.2.3	Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Summe	433
8	Prüf- oder Testverteilungen	433
8.1	Chi-Quadrat-Verteilung („ χ^2 -Verteilung“)	433
8.2	t -Verteilung von Student	435
XVI	Grundlagen der mathematischen Statistik	438
1	Grundbegriffe	438
1.1	Zufallsstichproben aus einer Grundgesamtheit	438
1.2	Häufigkeitsverteilung einer Stichprobe	439
1.3	Gruppierung der Stichprobenwerte bei umfangreichen Stichproben	441
2	Kennwerte oder Maßzahlen einer Stichprobe	444
2.1	Mittelwert, Varianz und Standardabweichung einer Stichprobe	444
2.2	Berechnung der Kennwerte unter Verwendung der Häufigkeitsfunktion	446
2.3	Berechnung der Kennwerte einer gruppierten Stichprobe	447
3	Statistische Schätzmethoden für unbekannte Parameter („Parameterschätzungen“)	448
3.1	Aufgaben der Parameterschätzung	448
3.2	Schätzfunktionen und Schätzwerte für unbekannte Parameter („Punktschätzungen“)	448
3.2.1	Schätz- und Stichprobenfunktionen	448
3.2.2	Schätzungen für den Mittelwert μ und die Varianz σ^2	449
3.2.3	Schätzungen für einen Anteilswert p (Parameter p einer Binomialverteilung)	450
3.2.4	Schätzwerte für die Parameter spezieller Wahrscheinlichkeitsverteilungen	450
3.3	Vertrauens- oder Konfidenzintervalle für unbekannte Parameter („Intervallschätzungen“)	451
3.3.1	Vertrauens- oder Konfidenzintervalle	451
3.3.2	Vertrauensintervalle für den unbekannten Mittelwert μ einer Normalverteilung bei bekannter Varianz σ^2	452

3.3.3	Vertrauensintervalle für den unbekannten Mittelwert μ einer Normalverteilung bei unbekannter Varianz σ^2	453
3.3.4	Vertrauensintervalle für den unbekannten Mittelwert μ bei einer beliebigen Verteilung	454
3.3.5	Vertrauensintervalle für die unbekannte Varianz σ^2 einer Normalverteilung	455
3.3.6	Vertrauensintervalle für einen unbekannten Anteilswert p (Parameter p einer Binomialverteilung)	456
3.3.7	Musterbeispiel für die Bestimmung eines Vertrauensintervalls	457
4	Statistische Prüfverfahren für unbekannte Parameter („Parametertests“)	458
4.1	Statistische Hypothesen und Parametertests	458
4.2	Spezielle Parametertests	459
4.2.1	Test für den unbekannten Mittelwert μ einer Normalverteilung bei bekannter Varianz σ^2	459
4.2.2	Test für den unbekannten Mittelwert μ einer Normalverteilung bei unbekannter Varianz σ^2	461
4.2.3	Tests für die Gleichheit der unbekannten Mittelwerte μ_1 und μ_2 zweier Normalverteilungen („Differenzentests“)	462
4.2.3.1	Differenzentests für Mittelwerte bei abhängigen Stichproben	463
4.2.3.2	Differenzentests für Mittelwerte bei unabhängigen Stichproben	464
4.2.4	Tests für die unbekannte Varianz σ^2 einer Normalverteilung ...	468
4.2.5	Tests für den unbekannten Anteilswert p (Parameter p einer Binomialverteilung)	470
4.2.6	Musterbeispiel für einen Parametertest	472
5	Chi-Quadrat-Test	473