

Kapitel I

Elemente der Zahlentheorie

1 Mathematische und didaktische Grundlagen	12
1.1 Grundbegriffe	12
1.2 Operative Beweise mit Punktfeldern	13
2 Lernumgebungen zum produktiven Üben	19
2.1 Schöne Muster bei Zahlenfolgen	19
2.2 Teilbarkeitsregeln	26
2.3 Teilmengen bestimmen	30
2.4 Das Primzahlsieb von Eratosthenes	33
2.5 Primzahlen und Primfaktorzerlegungen	36
2.6 Gemeinsame Vielfache bestimmten	38
2.7 Schöne Muster am Spirographen	41
2.8 Den ggT zweier Zahlen aus den Teilmengen bestimmen	46
2.9 Der Satz vom kgV und ggT und Ausblick auf den Fundamentalsatz	47
3 Forschen und Finden für die Leserinnen und Leser	50

Kapitel II

Übersicht über die Rechengesetze

1 Mathematische und didaktische Grundlagen	52
1.1 Das Poster „Werkzeugkasten Rechengesetze	52
1.2 Anwendung der Rechengesetze: Einsetzen, Umformen, Klammern setzen	55
2 Lernumgebungen zum grundlegenden Üben	56
2.1 Einführung des Posters „Werkzeugkasten Rechengesetze“	57
2.2 Einsetzen und Umformen	59
2.3. Begründung eines Zahlenmusters mit der Strichrechenregel	61
2.4. Begründung eines Zahlenmusters mit dem Distributivgesetz	63
3 Forschen und Finden für die Leserinnen und Leser	64

Kapitel III

Der prä-algebraische Zugang zu den ganzen Zahlen

1 Mathematische und didaktische Grundlagen	66
1.1 Einführung der negativen Zahlen als Gegenzahlen natürlicher Zahlen	66
1.2 Herleitung der Rechenregeln mit dem Permanenzprinzip und dem Gleichheitsprinzip	67
1.3 Darstellung ganzer Zahlen durch schwarze und rote Plättchen	68
2 Lernumgebungen zum grundlegenden und produktiven Üben	69
2.1 Interpretation negativer Zahlen in Sachkontexten	69
2.2 Hinführung zum Rechnen mit negativen Zahlen mithilfe „Schöner Päckchen“	71

2.3 Definition der negativen Zahlen und Darstellung an der Zahlengeraden	72
2.4 Herleitung der Rechenregeln für Strichrechnungen mit negativen Zahlen	75
2.5 Herleitung der Rechenregeln für Punktrechnungen mit negativen Zahlen	77
2.6 Fortsetzung der Lernumgebung von Kap. II.2.3	79
2.7 Fortsetzung der Lernumgebung von Kap. II.2.4	80
2.8 Potenzschreibweise von Zehnerpotenzen und Rechnen mit Zehnerpotenzen	81
2.9 Übertragung des Rechnens auf negative Dezimalzahlen	87

3 Forschen und Finden für die Leserinnen und Leser	89
---	-----------

Kapitel IV

Der prä-algebraische Zugang zu den Brüchen

1 Mathematische und didaktische Grundlagen	91
1.1 Einführung der Stammbrüche als Kehrwerte natürlicher Zahlen	91
1.2 Herleitung der Rechenregeln mit dem Permanenzprinzip und dem Gleichheitsprinzip ..	93
1.3 Grundlegende Darstellungen von Brüchen	96
2 Lernumgebungen zum grundlegenden Üben	97
2.1 Interpretation von Brüchen in Sachkontexten	98
2.2 Definition der Brüche als Kehrwerte natürlicher Zahlen	100
2.3 Verwandlung gemischter Brüche in gemeine Brüche und umgekehrt	105
2.4 Herleitung der Rechenregeln für Brüche und inhaltliche Deutung der Operationen	107
2.5 Größenvergleich von Brüchen	114
2.6 Das multiplikative Gegenstück zur Lernumgebung von Kap. II.2.3	116
2.7 Fortsetzung der Lernumgebung von Kap. II.2.4	118
2.8 Potenzen von natürlichen Zahlen und von Brüchen	119
2.9 Zahnradgetriebe	122
2.10 Beziehungen zwischen gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen	125
3 Forschen und Finden für die Leserinnen und Leser	131

Kapitel V

Produktive Übungen mit Brüchen

1 Mathematische und didaktische Grundlagen	132
1.1 Erweiterung der positiven Bruchzahlen zum Körper der rationalen Zahlen.....	132
1.2 Irrationale Zahlen.....	132
2 Lernumgebungen zum produktiven Üben.....	134
2.1 Die Teilungsaufgabe mit 17 Kamelen	135
2.2 Ägyptische Brüche	136
2.3 Summen von Stammbrüchen	141
2.4 Flächeninhalt von Rechtecken	145
2.5 Die Diagonale im Quadrat und Wurzeln	147
2.6 Negative Bruchzahlen	150
2.7 Ausblick auf die reellen Zahlen	152

3 Forschen und Finden für die Leserinnen und Leser	154
---	------------

Kapitel VI

Blitzrechnen

1 Übersicht über den Blitzrechnenkurs B	155
2 Die Übungen im Einzelnen	156
2.1 „Dezimalzahlen unterschiedlich lesen“	156
2.2 „Subtraktion von Stufenzahlen“	157
2.3 „Einmaleins mit Dezimalzahlen und Stelleneinmaleins“	157
2.4 „Die Stufenzahlen 1000, 100, 10 und 1 in 2, 4, 5, 8 und 10 Teile teilen“	157
2.5 „Bestimmung einfacher Prozentwerte“	158
2.6 „Bruchteile von Größen berechnen“	158
2.7 „Kürzen und Erweitern einfacher Brüche“	158
2.8 „Addition und Subtraktion einfacher Brüche“	159
2.9 „Multiplikation und Division einfacher Brüche“	159
2.10 „Verwandlung einfacher Brüche in Dezimalbrüche“	159

3 Forschen und Finden für die Leserinnen und Leser	160
---	------------

Kapitel VII

Einführung in die elementare Algebra

1 Mathematische und didaktische Grundlagen	161
1.1 Lehren aus der Geschichte der Algebra	161
1.2 Probleme von Schülern mit der Algebra	164
1.3 Der fließende Übergang vom Rechnen zur Algebra	165
2 Grundlegende Lernumgebungen	168
2.1 Formale Beschreibung von Wertetabellen	168
2.2 Formeln und Faustformeln	170
2.3 Fortsetzung der Lernumgebungen von Kap. II.2.3 und von Kap. III.2.6	172
2.4 Formalisierung der Rechengesetze und Regeln für ganze Zahlen und Brüche	176
2.5 Rechnen mit Termen und Klammern	182
2.6 Gesamtschau des „Werkzeugkastens Rechengesetze“	186
2.7 Fortsetzung der Lernumgebung von Kap. IV.2.6 und binomische Formeln	188
2.8 Gerade Zahlen, ungerade Zahlen und Quadratzahlen algebraisch gefasst	190
2.9 Übersetzung in die Sprache der Algebra	192
2.10 Nutzung von Variablen zur Lösung linearer Gleichungen	197
2.11 Sachaufgaben zu linearen Gleichungen	203
2.12 Lösung linearer Gleichungssysteme	206
2.13 Lösung quadratischer Gleichungen mit dem Malkreuz	210
2.14 Algebra. mit Größen	217

3 Forschen und Finden für die Leserinnen und Leser	225
---	------------