

## Kapitel I

## Elemente der Zahlentheorie

<b>1 Mathematische und didaktische Grundlagen</b> .....	12
1.1 Grundbegriffe .....	12
1.2 Operative Beweise mit Punktfeldern .....	13
<b>2 Lernumgebungen zum produktiven Üben</b> .....	19
2.1 Schöne Muster bei Zahlenfolgen .....	19
2.2 Teilbarkeitsregeln .....	26
2.3 Teilmengen bestimmen .....	30
2.4 Das Primzahlsieb von Eratosthenes .....	33
2.5 Primzahlen und Primfaktorzerlegungen .....	36
2.6 Gemeinsame Vielfache bestimmten .....	38
2.7 Schöne Muster am Spirographen .....	41
2.8 Den ggT zweier Zahlen aus den Teilmengen bestimmen .....	46
2.9 Der Satz vom kgV und ggT und Ausblick auf den Fundamentalsatz .....	47
<b>3 Forschen und Finden für die Leserinnen und Leser</b> .....	50

## Kapitel II

## Übersicht über die Rechengesetze

<b>1 Mathematische und didaktische Grundlagen</b> .....	52
1.1 Das Poster „Werkzeugkasten Rechengesetze“ .....	52
1.2 Anwendung der Rechengesetze: Einsetzen, Umformen, Klammern setzen .....	55
<b>2 Lernumgebungen zum grundlegenden Üben</b> .....	56
2.1 Einführung des Posters „Werkzeugkasten Rechengesetze“ .....	57
2.2 Einsetzen und Umformen .....	59
2.3. Begründung eines Zahlenmusters mit der Strichrechenregel .....	61
2.4. Begründung eines Zahlenmusters mit dem Distributivgesetz .....	63
<b>3 Forschen und Finden für die Leserinnen und Leser</b> .....	64

## Kapitel III Der prä-algebraische Zugang zu den ganzen Zahlen

<b>1 Mathematische und didaktische Grundlagen</b> .....	66
1.1 Einführung der negativen Zahlen als Gegenzahlen natürlicher Zahlen .....	66
1.2 Herleitung der Rechenregeln mit dem Permanenzprinzip und dem Gleichheitsprinzip .....	67
1.3 Darstellung ganzer Zahlen durch schwarze und rote Plättchen .....	68
<b>2 Lernumgebungen zum grundlegenden und produktiven Üben</b> .....	69
2.1 Interpretation negativer Zahlen in Sachkontexten .....	69
2.2 Hinführung zum Rechnen mit negativen Zahlen mithilfe „Schöner Päckchen“ .....	71

2.3 Definition der negativen Zahlen und Darstellung an der Zahlengeraden .....	72
2.4 Herleitung der Rechenregeln für Strichrechnungen mit negativen Zahlen .....	75
2.5 Herleitung der Rechenregeln für Punktrechnungen mit negativen Zahlen .....	77
2.6 Fortsetzung der Lernumgebung von Kap. II.2.3 .....	79
2.7 Fortsetzung der Lernumgebung von Kap. II.2.4 .....	80
2.8 Potenzschreibweise von Zehnerpotenzen und Rechnen mit Zehnerpotenzen .....	81
2.9 Übertragung des Rechnens auf negative Dezimalzahlen .....	87
<b>3 Forschen und Finden für die Leserinnen und Leser .....</b>	<b>89</b>

## Kapitel IV

## Der prä-algebraische Zugang zu den Brüchen

<b>1 Mathematische und didaktische Grundlagen .....</b>	<b>91</b>
1.1 Einführung der Stammbrüche als Kehrwerte natürlicher Zahlen .....	91
1.2 Herleitung der Rechenregeln mit dem Permanenzprinzip und dem Gleichheitsprinzip ..	93
1.3 Grundlegende Darstellungen von Brüchen .....	96
<b>2 Lernumgebungen zum grundlegenden Üben .....</b>	<b>97</b>
2.1 Interpretation von Brüchen in Sachkontexten .....	98
2.2 Definition der Brüche als Kehrwerte natürlicher Zahlen .....	100
2.3 Verwandlung gemischter Brüche in gemeine Brüche und umgekehrt .....	105
2.4 Herleitung der Rechenregeln für Brüche und inhaltliche Deutung der Operationen .....	107
2.5 Größenvergleich von Brüchen .....	114
2.6 Das multiplikative Gegenstück zur Lernumgebung von Kap. II.2.3 .....	116
2.7 Fortsetzung der Lernumgebung von Kap. II.2.4 .....	118
2.8 Potenzen von natürlichen Zahlen und von Brüchen .....	119
2.9 Zahnradgetriebe .....	122
2.10 Beziehungen zwischen gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen .....	125
<b>3 Forschen und Finden für die Leserinnen und Leser .....</b>	<b>131</b>

## Kapitel V

## Produktive Übungen mit Brüchen

<b>1 Mathematische und didaktische Grundlagen .....</b>	<b>132</b>
1.1 Erweiterung der positiven Bruchzahlen zum Körper der rationalen Zahlen.....	132
1.2 Irrationale Zahlen.....	132
<b>2 Lernumgebungen zum produktiven Üben.....</b>	<b>134</b>
2.1 Die Teilungsaufgabe mit 17 Kamelen .....	135
2.2 Ägyptische Brüche .....	136
2.3 Summen von Stammbrüchen .....	141
2.4 Flächeninhalt von Rechtecken .....	145
2.5 Die Diagonale im Quadrat und Wurzeln .....	147
2.6 Negative Bruchzahlen .....	150
2.7 Ausblick auf die reellen Zahlen .....	152

<b>3 Forschen und Finden für die Leserinnen und Leser .....</b>	154
---	-----

## **Kapitel VI** **Blitzrechnen**

<b>1 Übersicht über den Blitzrechenkurs B .....</b>	155
<b>2 Die Übungen im Einzelnen .....</b>	156
2.1 „Dezimalzahlen unterschiedlich lesen“ .....	156
2.2 „Subtraktion von Stufenzahlen“ .....	157
2.3 „Einmaleins mit Dezimalzahlen und Stelleneinmaleins“ .....	157
2.4 „Die Stufenzahlen 1000, 100, 10 und 1 in 2, 4, 5, 8 und 10 Teile teilen“ .....	157
2.5 „Bestimmung einfacher Prozentwerte“ .....	158
2.6 „Bruchteile von Größen berechnen“ .....	158
2.7 „Kürzen und Erweitern einfacher Brüche“ .....	158
2.8 „Addition und Subtraktion einfacher Brüche“ .....	159
2.9 „Multiplikation und Division einfacher Brüche“ .....	159
2.10 „Verwandlung einfacher Brüche in Dezimalbrüche“ .....	159

<b>3 Forschen und Finden für die Leserinnen und Leser .....</b>	160
---	-----

## **Kapitel VII** **Einführung in die elementare Algebra**

<b>1 Mathematische und didaktische Grundlagen .....</b>	161
1.1 Lehren aus der Geschichte der Algebra .....	161
1.2 Probleme von Schülern mit der Algebra .....	164
1.3 Der fließende Übergang vom Rechnen zur Algebra .....	165
<b>2 Grundlegende Lernumgebungen .....</b>	168
2.1 Formale Beschreibung von Wertetabellen .....	168
2.2 Formeln und Faustformeln .....	170
2.3 Fortsetzung der Lernumgebungen von Kap. II.2.3 und von Kap. III.2.6 .....	172
2.4 Formalisierung der Rechengesetze und Regeln für ganze Zahlen und Brüche .....	176
2.5 Rechnen mit Termen und Klammern .....	182
2.6 Gesamtschau des „Werkzeugkastens Rechengesetze“ .....	186
2.7 Fortsetzung der Lernumgebung von Kap. IV.2.6 und binomische Formeln .....	188
2.8 Gerade Zahlen, ungerade Zahlen und Quadratzahlen algebraisch gefasst .....	190
2.9 Übersetzung in die Sprache der Algebra .....	192
2.10 Nutzung von Variablen zur Lösung linearer Gleichungen .....	197
2.11 Sachaufgaben zu linearen Gleichungen .....	203
2.12 Lösung linearer Gleichungssysteme .....	206
2.13 Lösung quadratischer Gleichungen mit dem Malkreuz .....	210
2.14 Algebra. mit Größen .....	217

<b>3 Forschen und Finden für die Leserinnen und Leser .....</b>	225
---	-----