
Inhaltsverzeichnis

1 Funktionen und Folgen	1
1.1 Mengen	2
1.2 Funktionen	3
1.2.1 Graph	6
1.2.2 Umkehrabbildungen	6
1.2.3 Kompositionen	9
1.2.4 Symmetrien	10
1.2.5 Nullstellen	11
1.2.6 Fixpunkte	16
1.2.7 Periodizität	17
1.3 Folgen	19
1.3.1 Fixpunkte einer Folge	20
1.3.2 Konvergenz und Divergenz	20
1.3.3 Beweis von Konvergenz*	20
1.3.4 Rechenregeln für Grenzwerte	22
1.4 Grenzwerte von Funktionen	23
1.4.1 Grenzwert bestimmen	24
1.5 Stetigkeit und Monotonie	26
1.5.1 Stetigkeit	26
1.5.2 Monotonie	29
1.6 Reihen	30
1.6.1 Konvergenzkriterien	31
1.6.2 Potenzreihen	35
2 Differentialrechnung	39
2.1 Ableitungen und Differenzierbarkeit	39
2.2 Ableitungsregeln	42
2.2.1 Linearität	43
2.2.2 Produktregel	43
2.2.3 Kettenregel	44
2.2.4 Quotientenregel	46
2.2.5 Umkehrfunktion	46
2.2.6 Funktion in Potenz	47
2.3 Monotonie	48

2.4	Zweite Ableitung und Krümmung	49
2.5	Die Regel von de l'Hôpital	50
2.6	Extrema	52
2.7	Taylor-Polynome	55
3	Integrale	57
3.1	Einführung	57
3.2	Stammfunktionen	60
3.3	Standardintegrale	61
3.4	Linearität des Integrals	62
3.4.1	Addition und Subtraktion	62
3.4.2	Multiplikation mit Skalar	62
3.5	Partielle Integration	63
3.5.1	DI-Methode	64
3.6	Substitution	71
3.7	Partialbruchzerlegung	78
3.7.1	Koeffizientenvergleich	78
3.7.2	Integrale mit Partialbruchzerlegung	79
3.7.3	Ein Trick für den Koeffizientenvergleich	86
3.8	Flächenberechnung mit Integralen	87
3.8.1	Betragsfunktionen	87
3.8.2	Fläche unter dem Graph	88
3.8.3	Fläche zwischen zwei Graphen	89
3.9	Anwendungen der Integralrechnung	91
3.9.1	Uneigentliche Integrale	91
3.9.2	Mittelwert einer Funktion	92
3.9.3	Länge einer Kurve	92
3.9.4	Rotationskörper	93
3.9.5	Gabriels Horn	94
4	Komplexe Zahlen	97
4.1	Einführung	97
4.2	Definition und Rechenregeln	98
4.3	Komplexe Konjugation und Betrag	100
4.4	Polarform	103
4.4.1	Die schönste Formel der Welt	104
4.4.2	Umformung Normalform $\rightarrow$ Polarform	106
4.4.3	Umformung Polarform $\rightarrow$ Normalform	109
4.4.4	Rechenregeln	109
4.4.5	Eindeutigkeit der Polarform	111
4.4.6	Wurzel	112
4.5	Fundamentalsatz der Algebra	114
5	Lineare Algebra	117
5.1	Matrizenrechnung	117
5.1.1	Matrix-Vektor-Multiplikation	118
5.1.2	Matrix-Matrix-Multiplikation	120

5.2	Arten von Matrizen	122
5.2.1	Transponierte einer Matrix	122
5.2.2	Quadratische Matrix	123
5.3	Determinante	124
5.3.1	Eigenschaften	125
5.3.2	Determinante einer 2×2 -Matrix	125
5.3.3	Determinante einer 3×3 -Matrix	126
5.3.4	Determinante einer $n \times n$ -Matrix	127
5.4	Inverse Matrizen	129
5.4.1	Inverse einer 2×2 -Matrix	130
5.4.2	Existenz der inversen Matrix	130
5.4.3	Inverse einer $n \times n$ -Matrix	132
5.4.4	Shortcut für 3×3 -Matrizen	132
5.4.5	Weitere Eigenschaften	135
5.5	Lineare Gleichungssysteme und Gauß	136
5.5.1	Gauß-Verfahren	138
5.5.2	Cramersche Regel	144
5.5.3	Determinante mit elementaren Umformungen	147
5.5.4	Ein alternatives Verfahren	149
5.6	Rang	155
5.6.1	Lineare Gleichungssysteme mit unendlich vielen Lösungen	156
5.7	Gauß-Jordan-Verfahren für Inversen	158
5.8	Lineare Unabhängigkeit	161
5.8.1	Lineare Unabhängigkeit mit Determinante	162
5.9	Eigenwerte und Eigenvektoren	163
5.9.1	Berechnung von Eigenwerten	164
5.9.2	Eine Formel für Eigenwerte von 2×2 -Matrizen	166
5.9.3	Berechnung von Eigenvektoren	167
6	Differentialgleichungen	171
6.1	Einführung	171
6.2	Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung	173
6.2.1	Homogener Fall	173
6.2.2	Inhomogener Fall	174
6.2.3	Konstante Koeffizienten	176
6.2.4	Partikuläre Lösung	177
6.3	Nichtlineare Differentialgleichung 1. Ordnung	177
6.3.1	Trennung der Variablen	177
6.3.2	Substitution	180
6.4	Zusammenfassung 1. Ordnung	180
6.5	Lineare Differentialgleichung 2. Ordnung	181
6.5.1	Homogener Fall	181
6.5.2	Inhomogener Fall	184
6.6	Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung	186

6.6.1	Lösung eines (2×2) -DGL-Systems mit konstanten Koeffi- zienten.	186
6.6.2	Lösung eines $(n \times n)$ -DGL-Systems	190
6.7	Richtungsfeld	190
7	Mehrdimensionale Funktionen	193
7.1	Einführung	193
7.2	Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$	194
7.2.1	Graphen und Niveaulinien	195
7.3	Partielle Ableitungen	198
7.3.1	n-te partielle Ableitungen	200
7.3.2	Implizite Differentiation	201
7.3.3	Totales Differential	201
7.4	Extrema	202
7.4.1	Bestimmung der kritischen Punkte	202
7.4.2	Extrema mit Nebenbedingungen	205
7.5	Tangentialebene	207
8	Mehrdimensionale Integrale	209
8.1	Gebietsintegrale	209
8.1.1	Flächenberechnung	214
8.1.2	Polarkoordinaten	215
8.2	Volumenintegral	217
9	Vektoranalysis	221
9.1	Parametrisierung	221
9.1.1	Geraden parametrisieren	222
9.1.2	Funktionen parametrisieren	224
9.1.3	Kreise und Ellipsen	225
9.2	Kurvenintegrale	226
9.2.1	Länge der Kurve	228
9.2.2	Zusammengesetzte Kurven	228
9.3	Vektorfelder	229
9.3.1	Gradient	229
9.3.2	Definition	231
9.3.3	Arbeitsintegral – das Kurvenintegral von Vektorfeldern	232
9.3.4	Konservative Vektorfelder	235
9.4	Divergenz	237
9.5	Satz von Green	240
9.6	Satz von Gauß – das Flussintegral	242
9.6.1	Normalenvektor und Fluss	242
9.6.2	Herleitung	244
Anhang A: Vorkenntnisse		247
Anhang B: Mathematische Symbole		255
Anhang C: Wichtige Graphen		257
Anhang D: Beweis DI-Methode		259