

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen	19
1.1	Logik und Mengen	19
1.1.1	Aussagenlogik	19
1.1.2	Mengen	22
1.2	Zahlen	25
1.2.1	Natürliche Zahlen	25
1.2.2	Ganze Zahlen	26
1.2.3	Rationale Zahlen	27
1.2.4	Reelle Zahlen	28
1.2.5	Ordnung	30
1.2.6	Intervalle	31
1.2.7	Betrag und Signum	32
1.2.8	Summe und Produkt	35
1.3	Potenz und Wurzel	36
1.3.1	Potenzen	36
1.3.2	Potenzgesetze	37
1.3.3	Wurzeln	37
1.3.4	Binomischer Satz	38
1.4	Trigonometrie	40
1.4.1	Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck	40
1.4.2	Winkel im Grad- und Bogenmaß	42
1.4.3	Sinus- und Kosinussatz	43
1.5	Gleichungen und Ungleichungen	44
1.5.1	Lineare Gleichungen	45
1.5.2	Potenzgleichungen	46
1.5.3	Quadratische Gleichungen	46
1.5.4	Wurzelgleichungen	48
1.5.5	Ungleichungen	49
1.6	Beweise	51
1.6.1	Direkter Beweis	52
1.6.2	Indirekter Beweis	52
1.6.3	Konstruktiver Beweis	53
1.6.4	Vollständige Induktion	54
1.7	Aufgaben	56
1.7.1	Verständnis und Kompetenz	56
1.7.2	Rechnung und Training	57
1.7.3	Anwendung	60

2	Lineare Gleichungssysteme	61
2.1	Einführung	61
2.2	Gauß-Algorithmus	63
2.2.1	Äquivalenzumformungen	64
2.2.2	Vorwärtselimination	65
2.2.3	Rückwärtseinsetzen	66
2.2.4	Gaußsches Eliminationsverfahren	67
2.2.5	Rechenschema	68
2.3	Spezielle Typen linearer Gleichungssysteme	70
2.3.1	Lineare Gleichungssysteme ohne Lösung	70
2.3.2	Lineare Gleichungssysteme mit unendlich vielen Lösungen	71
2.3.3	Systeme mit redundanten Gleichungen	72
2.3.4	Unterbestimmte lineare Gleichungssysteme	73
2.3.5	Überbestimmte lineare Gleichungssysteme	74
2.3.6	Homogene lineare Gleichungssysteme	75
2.3.7	Lineare Gleichungssysteme mit Parametern	77
2.4	Numerische Verfahren	79
2.4.1	Jacobi-Iteration	79
2.4.2	Gauß-Seidel-Iteration	80
2.5	Anwendungen	81
2.5.1	Produktion	81
2.5.2	Netzwerkanalyse in der Elektrotechnik	82
2.6	Aufgaben	83
2.6.1	Verständnis und Kompetenz	83
2.6.2	Rechnung und Training	83
2.6.3	Anwendung	84
3	Vektoren	85
3.1	Der Begriff eines Vektors	85
3.2	Vektorrechnung ohne Koordinaten	87
3.2.1	Addition und Subtraktion	87
3.2.2	Skalare Multiplikation	89
3.2.3	Skalarprodukt	90
3.2.4	Vektorprodukt	94
3.2.5	Spatprodukt	96
3.2.6	Lineare Unabhängigkeit	98
3.3	Vektoren in Koordinatendarstellung	102
3.3.1	Koordinatendarstellung	103
3.3.2	Addition und Subtraktion	104
3.3.3	Skalare Multiplikation	105
3.3.4	Skalarprodukt	105
3.3.5	Vektorprodukt	107
3.3.6	Spatprodukt	109
3.3.7	Lineare Unabhängigkeit	109
3.4	Punkte, Geraden und Ebenen	112
3.4.1	Kartesisches Koordinatensystem	112

3.4.2	Parameterdarstellung von Geraden und Ebenen	114
3.4.3	Parameterfreie Darstellung von Geraden und Ebenen	116
3.4.4	Schnitte von Geraden und Ebenen	117
3.4.5	Abstände	119
3.4.6	Winkel	122
3.5	Anwendungen	124
3.5.1	Kraft	124
3.5.2	Arbeit	124
3.5.3	Drehmoment	125
3.6	Aufgaben	126
3.6.1	Verständnis und Kompetenz	126
3.6.2	Rechnung und Training	127
3.6.3	Anwendung	130
4	Matrizen	131
4.1	Der Begriff einer Matrix	131
4.2	Rechnen mit Matrizen	135
4.2.1	Addition, Subtraktion und skalare Multiplikation	136
4.2.2	Multiplikation von Matrizen	137
4.3	Determinanten	143
4.3.1	Determinante einer (2,2)-Matrix	143
4.3.2	Determinante einer (3,3)-Matrix	145
4.3.3	Determinante einer (n,n)-Matrix	149
4.4	Inverse Matrix	152
4.4.1	Invertierbare Matrizen	153
4.4.2	Inverse einer (2,2)-Matrix	154
4.4.3	Inverse Matrix und lineares Gleichungssystem	155
4.4.4	Orthogonale Matrizen	155
4.5	Lineare Abbildungen	156
4.5.1	Matrizen als Abbildungen	156
4.5.2	Koordinatentransformation	158
4.5.3	Kern, Bild und Rang	159
4.6	Eigenwerte und Eigenvektoren	160
4.7	Numerische Verfahren	166
4.7.1	Potenzmethode	166
4.8	Anwendungen	167
4.8.1	Computergrafik	168
4.9	Aufgaben	169
4.9.1	Verständnis und Kompetenz	169
4.9.2	Rechnung und Training	170
4.9.3	Anwendung	172
5	Funktionen	173
5.1	Relationen und Funktionen	173
5.1.1	Relationen	173
5.1.2	Funktionen	174

5.2	Reelle Funktionen	176
5.2.1	Definitionsmenge, Zielmenge und Wertemenge	176
5.2.2	Wertetabelle und Schaubild	178
5.2.3	Explizite und implizite Darstellung	180
5.2.4	Abschnittsweise definierte Funktionen	181
5.2.5	Funktionsschar	183
5.2.6	Verkettung von Funktionen	184
5.3	Eigenschaften	187
5.3.1	Symmetrie	188
5.3.2	Periode	191
5.3.3	Monotonie	192
5.3.4	Beschränktheit	193
5.4	Das Prinzip der Umkehrfunktion	194
5.5	Anwendungen	197
5.5.1	Messwerte	197
5.5.2	Kennfelder	198
5.6	Aufgaben	199
5.6.1	Verständnis und Kompetenz	199
5.6.2	Rechnung und Training	200
6	Elementare Funktionen	201
6.1	Potenz- und Wurzelfunktionen	201
6.1.1	Potenzfunktionen	201
6.1.2	Wurzelfunktionen	203
6.2	Polynome und gebrochenrationale Funktionen	204
6.2.1	Polynome	204
6.2.2	Gebrochenrationale Funktionen	212
6.3	Sinus, Kosinus, Tangens und Arkusfunktionen	220
6.3.1	Definition am Einheitskreis	220
6.3.2	Eigenschaften	221
6.3.3	Allgemeine Sinus- und Kosinusfunktion	224
6.3.4	Arkusfunktionen	226
6.4	Exponential- und Logarithmusfunktionen	231
6.4.1	Exponentialfunktionen	231
6.4.2	Die e-Funktion	232
6.4.3	Logarithmusfunktionen	234
6.5	Hyperbel- und Areafunktionen	237
6.5.1	Hyperbelfunktionen	237
6.5.2	Areafunktionen	239
6.6	Anwendungen	240
6.6.1	Freileitungen	240
6.6.2	Industrieroboter	241
6.7	Aufgaben	242
6.7.1	Verständnis und Kompetenz	242
6.7.2	Rechnung und Training	243
6.7.3	Anwendung	244

7	Folgen, Grenzwerte und Stetigkeit	245
7.1	Folgen	245
7.1.1	Zahlenfolgen	245
7.1.2	Grenzwert einer Folge	249
7.2	Funktionsgrenzwerte	253
7.3	Stetigkeit	255
7.4	Asymptotisches Verhalten	260
7.5	Numerische Verfahren	264
7.5.1	Berechnung von Funktionswerten	265
7.5.2	Bisektionsverfahren	266
7.6	Anwendungen	268
7.6.1	Kapital und Zinsen	268
7.7	Aufgaben	269
7.7.1	Verständnis und Kompetenz	269
7.7.2	Rechnung und Training	270
8	Differenzialrechnung	271
8.1	Steigung und Ableitungsfunktion	271
8.1.1	Tangente und Differenzierbarkeit	271
8.1.2	Differenzial	275
8.1.3	Ableitungsfunktion	276
8.1.4	Mittelwertsatz der Differenzialrechnung	279
8.1.5	Höhere Ableitungen	280
8.2	Ableitungstechnik	281
8.2.1	Ableitungsregeln	281
8.2.2	Ableitung der Umkehrfunktion	286
8.2.3	Logarithmisches Differenzieren	288
8.2.4	Implizites Differenzieren	289
8.2.5	Zusammenfassung	290
8.3	Regel von Bernoulli-de l'Hospital	291
8.4	Geometrische Bedeutung der Ableitungen	295
8.4.1	Neigungswinkel und Schnittwinkel	295
8.4.2	Monotonie	297
8.4.3	Krümmung	298
8.4.4	Lokale Extrema	299
8.4.5	Wendepunkte	303
8.4.6	Globale Extrema	304
8.5	Numerische Verfahren	305
8.5.1	Numerische Differenziation	306
8.5.2	Newton-Verfahren	307
8.5.3	Sekantenverfahren	309
8.6	Anwendungen	310
8.6.1	Fehlerrechnung	310
8.6.2	Extremwertaufgaben	312
8.6.3	Momentan- und Durchschnittsgeschwindigkeit	314

8.7	Aufgaben	315
8.7.1	Verständnis und Kompetenz	315
8.7.2	Rechnung und Training	316
8.7.3	Anwendung	319
9	Integralrechnung	321
9.1	Flächenproblem	321
9.1.1	Integralsymbol	321
9.1.2	Integral als Grenzwert von Summen	322
9.1.3	Bestimmtes Integral	324
9.2	Zusammenhang von Ableitung und Integral	325
9.2.1	Integralfunktion	325
9.2.2	Stammfunktion	327
9.2.3	Bestimmtes Integral und Stammfunktion	329
9.2.4	Mittelwertsatz der Integralrechnung	330
9.3	Integrationstechnik	332
9.3.1	Integrationsregeln	332
9.3.2	Integration durch Substitution	336
9.3.3	Partielle Integration	343
9.3.4	Gebrochenrationale Funktionen	345
9.3.5	Uneigentliche Integrale	348
9.4	Länge, Flächeninhalt und Volumen	351
9.4.1	Flächeninhalte	351
9.4.2	Bogenlänge	353
9.4.3	Rotationskörper	355
9.5	Numerische Verfahren	359
9.5.1	Trapezregel	360
9.5.2	Romberg-Verfahren	362
9.6	Anwendungen	362
9.6.1	Effektivwert	362
9.6.2	Schwerpunkte und statische Momente ebener Flächen	363
9.7	Aufgaben	367
9.7.1	Verständnis und Kompetenz	367
9.7.2	Rechnung und Training	368
9.7.3	Anwendung	370
10	Potenzreihen	371
10.1	Einführung	371
10.2	Unendliche Reihen	372
10.3	Potenzreihen und Konvergenz	376
10.4	Taylor-Reihen	377
10.5	Eigenschaften	379
10.6	Numerische Verfahren	385
10.6.1	Berechnung von Funktionswerten	385
10.7	Anwendungen	386
10.7.1	Normalverteilung in der Statistik	386

10.8 Aufgaben	387
10.8.1 Verständnis und Kompetenz	387
10.8.2 Rechnung und Training	387
10.8.3 Anwendung	388
11 Kurven	389
11.1 Parameterdarstellung	389
11.2 Kegelschnitte	392
11.3 Tangente	398
11.4 Krümmung	400
11.5 Bogenlänge	405
11.6 Numerische Verfahren	407
11.6.1 Bézier-Kurve	407
11.7 Anwendungen	409
11.7.1 Mechanik	409
11.7.2 Straßenbau	410
11.8 Aufgaben	412
11.8.1 Verständnis und Kompetenz	412
11.8.2 Rechnung und Training	413
11.8.3 Anwendung	414
12 Funktionen mit mehreren Variablen	415
12.1 Definition und Darstellung	415
12.1.1 Definition einer Funktion mit mehreren Variablen	415
12.1.2 Schaubild einer Funktion mit mehreren Variablen	416
12.1.3 Schnittkurven mit Ebenen und Höhenlinien	416
12.2 Grenzwert und Stetigkeit	420
12.2.1 Grenzwert einer Funktion mit mehreren Variablen	420
12.2.2 Stetigkeit	421
12.3 Differenziation	422
12.3.1 Partielle Ableitungen und partielle Differenzierbarkeit	422
12.3.2 Differenzierbarkeit und Tangentialebene	425
12.3.3 Gradient und Richtungsableitung	427
12.3.4 Differenzial	430
12.3.5 Höhere partielle Ableitungen	433
12.3.6 Extremwerte	435
12.4 Ausgleichsrechnung	437
12.4.1 Methode der kleinsten Fehlerquadrate	437
12.4.2 Ausgleichsrechnung mit Polynomen	438
12.4.3 Lineare Ausgleichsrechnung	442
12.5 Vektorwertige Funktionen	444
12.6 Numerische Verfahren	445
12.6.1 Mehrdimensionales Newton-Verfahren	445
12.6.2 Gradientenverfahren	447
12.7 Anwendungen	449
12.7.1 Fehlerrechnung	449

12.8 Aufgaben	451
12.8.1 Verständnis und Kompetenz	451
12.8.2 Rechnung und Training	451
12.8.3 Anwendung	452
13 Komplexe Zahlen und Funktionen	453
13.1 Definition und Darstellung	453
13.1.1 Komplexe Zahlen	453
13.1.2 Gaußsche Zahlenebene	454
13.1.3 Polarkoordinaten	455
13.1.4 Exponentialform	457
13.2 Rechenregeln	459
13.2.1 Gleichheit	459
13.2.2 Addition und Subtraktion	459
13.2.3 Multiplikation und Division	460
13.2.4 Rechnen mit der konjugiert komplexen Zahl	462
13.2.5 Rechnen mit dem Betrag einer komplexen Zahl	462
13.3 Potenzen, Wurzeln und Polynome	464
13.3.1 Potenzen	465
13.3.2 Wurzeln	465
13.3.3 Fundamentalsatz der Algebra	468
13.4 Komplexe Funktionen	470
13.4.1 Ortskurven	471
13.4.2 Harmonische Schwingungen	472
13.4.3 Transformationen	476
13.5 Anwendungen	480
13.5.1 Komplexe Wechselstromrechnung	480
13.6 Aufgaben	481
13.6.1 Verständnis und Kompetenz	481
13.6.2 Rechnung und Training	481
13.6.3 Anwendung	482
14 Gewöhnliche Differenzialgleichungen	483
14.1 Einführung	483
14.1.1 Grundbegriffe	483
14.1.2 Anfangswert- und Randwertproblem	486
14.1.3 Richtungsfeld und Orthogonaltrajektorie	488
14.1.4 Differenzialgleichung und Funktionsschar	490
14.2 Differenzialgleichungen erster Ordnung	491
14.2.1 Separation der Variablen	492
14.2.2 Lineare Substitution	494
14.2.3 Ähnlichkeitsdifferenzialgleichungen	495
14.3 Lineare Differenzialgleichungen	496
14.3.1 Homogene und inhomogene lineare Differenzialgleichungen	496
14.3.2 Lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung	499
14.3.3 Allgemeine Eigenschaften	503

14.3.4	Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	506
14.4	Schwingungsdifferenzialgleichungen	519
14.4.1	Allgemeine Form	519
14.4.2	Freie Schwingung	520
14.4.3	Harmonisch angeregte Schwingung	522
14.4.4	Frequenzgänge	526
14.5	Differenzialgleichungssysteme	528
14.5.1	Eliminationsverfahren	528
14.5.2	Zustandsvariablen	530
14.5.3	Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten	532
14.5.4	Lineare Differenzialgleichung als System	539
14.5.5	Stabilität	540
14.6	Numerische Verfahren	544
14.6.1	Polygonzugverfahren von Euler	544
14.6.2	Euler-Verfahren für Differenzialgleichungssysteme	546
14.7	Anwendungen	547
14.7.1	Temperaturverlauf	547
14.7.2	Radioaktiver Zerfall	548
14.7.3	Freier Fall mit Luftwiderstand	548
14.7.4	Feder-Masse-Schwinger	549
14.7.5	Pendel	550
14.7.6	Wechselstromkreise	550
14.8	Aufgaben	553
14.8.1	Verständnis und Kompetenz	553
14.8.2	Rechnung und Training	555
14.8.3	Anwendung	558
15	Differenzengleichungen	559
15.1	Lineare Differenzengleichungen	559
15.1.1	Differenzengleichungen erster Ordnung	561
15.1.2	Differenzengleichungen höherer Ordnung	563
15.2	Systeme linearer Differenzengleichungen	567
15.2.1	Homogene Systeme erster Ordnung	568
15.2.2	Inhomogene Systeme erster Ordnung	570
15.2.3	Asymptotisches Verhalten	571
15.3	Anwendungen	573
15.3.1	Darlehen	573
15.4	Aufgaben	574
15.4.1	Rechnung und Training	574
15.4.2	Anwendung	574
16	Fourier-Reihen	575
16.1	Fourier-Analyse	575
16.1.1	Periodische Funktionen	575
16.1.2	Trigonometrische Polynome	577
16.1.3	Fourier-Reihe	579

16.1.4	Satz von Fourier	580
16.1.5	Gibbssches Phänomen	583
16.2	Komplexe Darstellung	585
16.2.1	Komplexe Fourier-Reihe	585
16.2.2	Berechnung komplexer Fourier-Koeffizienten	587
16.2.3	Spektrum	589
16.2.4	Minimaleigenschaft	592
16.3	Eigenschaften	594
16.3.1	Symmetrie	594
16.3.2	Integrationsintervall	595
16.3.3	Mittelwert	596
16.3.4	Linearität	596
16.3.5	Ähnlichkeit und Zeitumkehr	598
16.3.6	Zeitverschiebung	599
16.4	Aufgaben	601
16.4.1	Verständnis und Kompetenz	601
16.4.2	Rechnung und Training	601
17	Verallgemeinerte Funktionen	603
17.1	Heaviside-Funktion	603
17.2	Dirac-Distribution	605
17.3	Verallgemeinerte Ableitung	607
17.4	Faltung	609
17.5	Anwendungen	613
17.5.1	B-Splines	613
17.6	Aufgaben	614
17.6.1	Verständnis und Kompetenz	614
17.6.2	Rechnung und Training	614
18	Fourier-Transformation	615
18.1	Integraltransformation	615
18.1.1	Definition	615
18.1.2	Darstellung mit Real- und Imaginärteil	617
18.1.3	Sinus- und Kosinustransformation	619
18.1.4	Transformation gerader und ungerader Funktionen	620
18.1.5	Darstellung mit Amplitude und Phase	622
18.2	Eigenschaften	623
18.2.1	Linearität	624
18.2.2	Zeitverschiebung	625
18.2.3	Amplitudenmodulation	627
18.2.4	Ähnlichkeit und Zeitumkehr	629
18.3	Inverse Fourier-Transformation	630
18.3.1	Definition	630
18.3.2	Vertauschungssatz	632
18.3.3	Linearität	633

18.4	Differenziation, Integration und Faltung	633
18.4.1	Differenziation im Zeitbereich	633
18.4.2	Differenziation im Frequenzbereich	635
18.4.3	Multiplikationssatz	635
18.4.4	Integration	636
18.4.5	Faltung	637
18.5	Periodische Funktionen	637
18.5.1	Fourier-Transformation einer Fourier-Reihe	638
18.5.2	Koeffizienten der Fourier-Reihe	638
18.5.3	Grenzwertbetrachtung	640
18.6	Anwendungen	642
18.6.1	Lineare zeitinvariante Systeme	642
18.6.2	Tiefpassfilter	644
18.7	Aufgaben	646
18.7.1	Verständnis und Kompetenz	646
18.7.2	Rechnung und Training	648
18.7.3	Anwendung	648
19	Laplace-Transformation	649
19.1	Bildbereich	649
19.1.1	Definition	649
19.1.2	Laplace- und Fourier-Transformation	652
19.2	Eigenschaften	653
19.2.1	Linearität	653
19.2.2	Ähnlichkeit	654
19.2.3	Zeitverschiebung	655
19.2.4	Dämpfung	656
19.3	Differenziation, Integration und Faltung	657
19.3.1	Differenziation	657
19.3.2	Integration	659
19.3.3	Faltung	660
19.3.4	Grenzwerte	661
19.4	Transformation periodischer Funktionen	661
19.5	Rücktransformation	663
19.6	Lösung gewöhnlicher Differenzialgleichungen	664
19.7	Anwendungen	670
19.7.1	Regelungstechnik	670
19.8	Aufgaben	673
19.8.1	Verständnis und Kompetenz	673
19.8.2	Rechnung und Training	674
19.8.3	Anwendung	674
20	z-Transformation	675
20.1	Transformation diskreter Signale	675
20.1.1	Definition	675
20.1.2	z-Transformation und Laplace-Transformation	677

20.2	Eigenschaften	678
20.2.1	Linearität	678
20.2.2	Dämpfung	679
20.2.3	Verschiebung	679
20.2.4	Vorwärtsdifferenzen	681
20.2.5	Multiplikationssatz	682
20.2.6	Diskrete Faltung	682
20.3	Lösung von Differenzengleichungen	684
20.4	Anwendungen	687
20.4.1	Zeitkomplexität von Quicksort	687
20.5	Aufgaben	689
20.5.1	Verständnis und Kompetenz	689
20.5.2	Rechnung und Training	689
20.5.3	Anwendung	690
21	Elementare Zahlentheorie	691
21.1	Teilbarkeit	691
21.2	Kongruente Zahlen	695
21.3	Primzahlen	700
21.4	Anwendungen	704
21.4.1	International Bank Account Number (IBAN)	704
21.4.2	Linearer Kongruenzgenerator für Pseudozufallszahlen	705
21.5	Aufgaben	706
21.5.1	Verständnis und Kompetenz	706
21.5.2	Rechnung und Training	706
A	Anhang	707
A.1	Bedeutende Mathematiker	707
A.2	Trigonometrische Funktionen	726
A.3	Ableitungen	728
A.4	Integrale	729
A.5	Ableitungsregeln und Integralregeln	732
A.6	Potenzreihen	733
A.7	Fourier-Reihen	734
A.8	Korrespondenzen der Fourier-Transformation	736
A.9	Eigenschaften der Fourier-Transformation	738
A.10	Korrespondenzen der Laplace-Transformation	739
A.11	Eigenschaften der Laplace-Transformation	740
A.12	Korrespondenzen der z-Transformationen	741
A.13	Eigenschaften der z-Transformationen	741
A.14	Griechisches Alphabet	742
	Literaturverzeichnis	743
	Sachwortverzeichnis	745