

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung in die mathematische Sprache	1
1.1	Grundlegendes	1
1.2	Aussagenlogik	2
1.3	Mengen	9
1.4	Abbildungen zwischen Mengen	19
2	Körper	27
2.1	Definition und Beispiele	27
2.2	Wichtige Eigenschaften	33
2.3	Die komplexen Zahlen	38
3	Vektorräume und lineare Abbildungen	43
3.1	Der Begriff des Vektorraums	43
3.2	Untervektorräume	49
3.3	Lineare Abbildungen – allgemein	52
3.4	Lineare Abbildungen $\mathbf{k}^n \rightarrow \mathbf{k}^m$ und Matrizen	57
3.5	Matrizenmultiplikation	64
4	Basis und Dimension	73
4.1	Lineare Unabhängigkeit	77
4.2	Erzeugendensysteme	86
4.3	Basis eines Vektorraums	91
4.4	Basisergänzung – der endlich-erzeugte Fall	95
4.5	Basisergänzung – der allgemeine Fall	102
4.6	Untervektorräume – Summen und Dimension	105
5	Lineare Abbildungen und Matrizen – allgemeiner Fall	111
5.1	Basiswahl als Isomorphismus	111
5.2	Die darstellende Matrix	114
5.3	Der Rang	124

6	Lineare Gleichungssysteme – das Gauß -Verfahren	133
6.1	Lineare Gleichungssysteme	133
6.2	Zeilenumformungen	136
6.3	Das Gauß-Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme	148
6.4	Weitere Anwendungen	154
6.5	Spaltenumformungen	165
7	Äquivalenzrelationen und Quotientenvektorräume	173
7.1	Äquivalenzrelationen	173
7.2	Quotientenvektorräume	180
7.3	Der Homomorphiesatz	184
7.4	Basiswahl, Dimension und komplementäre Untervektorräume	186
7.5	Kurze exakte Sequenzen und weitere Isomorphiesätze	189
8	Der Polynomring über einem Körper	199
8.1	Der Polynomring	199
8.2	Division mit Rest	203
8.3	Der euklidische Algorithmus	207
8.4	Der Fundamentalsatz der Algebra – ohne Beweis	217
8.5	Das Minimalpolynom einer quadratischen Matrix	218
9	Die Determinante	231
9.1	Die symmetrische Gruppe	231
9.2	Das Signum einer Permutation	239
9.3	Alternierende Formen	245
9.4	Die Determinante	251
9.5	Weitere Eigenschaften der Determinante	267
9.6	Cramer'sche Regel und die Adjunkte	272
9.7	Eine Verallgemeinerung – Determinante mit einer Polynomvariablen	279
10	Eigenwerte	289
10.1	Diagonalisierbarkeit von Endomorphismen	289
10.2	Der Eigenraum zu einem Eigenwert	296
10.3	Eigenwerte und das charakteristische Polynom	301
10.4	Kriterien für die Diagonalisierbarkeit	309
10.5	Nicht-diagonalisierbare Matrizen	318
10.6	Das Minimalpolynom und Diagonalisierbarkeit	320
11	Skalarprodukte, euklidische und unitäre Vektorräume	333
11.1	Skalarprodukte	333
11.2	Gram-Schmidt-Orthonormalisierung	344
11.3	Hermiteische Formen	349
11.4	Gram-Schmidt im unitären Fall	353
11.5	Orthogonale und Unitäre Matrizen	354

12	Der Dualraum	359
12.1	Der Dualraum – Definition	359
12.2	Ein natürlicher Isomorphismus im endlich-dimensionalen Fall	366
12.3	Die duale Abbildung	373
12.4	Dualraum und nicht-entartete Bilinearform	377
13	Hauptachsentransformation	381
13.1	Selbstadjungierte lineare Abbildungen	381
13.2	Der Rayleigh-Quotient	386
13.3	Der Hauptachsentransformationssatz	392
13.4	Unitäre Diagonalisierbarkeit Hermitescher Matrizen	397
13.5	Die Normalform einer orthogonalen Matrix	400

Sachverzeichnis