

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen und Voraussetzungen	
1.1	Mengen.....	4
1.1.1	Mengen und ihre Elemente.....	4
1.1.2	Mengen und ihre Mächtigkeit.....	6
1.1.3	Gleichheit von Mengen und Teilmengen.....	8
1.1.4	Verknüpfungen von Mengen.....	9
1.2	Grundbegriffe des logischen Schließens.....	12
1.2.1	Implikationen und die Äquivalenz von Aussagen.....	13
1.2.2	Mathematische Logik und Alltagslogik.....	14
1.2.3	Einige (wenige) Regeln des mathematischen Beweisens und logischen Schließens.....	14
1.2.4	Implikationen und Beweisverfahren.....	15
1.2.5	Quantoren.....	18
1.3	Übungsaufgaben.....	20
2	Natürliche Zahlen	
2.1	Rechnen mit natürlichen Zahlen.....	25
2.1.1	Addition und Subtraktion.....	26
2.1.2	Das Prinzip des kleinsten Elements.....	26
2.1.3	Multiplikation und Teilbarkeit.....	30
2.1.4	Die Goldbach'sche Vermutung.....	32
2.2	Die Idee der unendlichen Mengen.....	34
2.2.1	Gibt es unendliche Mengen?.....	34
2.2.2	Hilberts Hotel.....	34
2.3	Das Prinzip der vollständigen Induktion.....	36
2.3.1	Beweisen durch vollständige Induktion.....	36
2.3.2	Definition durch Induktion: Das Produkt natürlicher Zahlen.....	42
2.3.3	Definition durch Induktion: n Fakultät.....	44
2.3.4	Definition durch Induktion: Die Fibonacci-Zahlen.....	44
2.3.5	Geometrische Summenformel.....	48
2.4	Der binomische Lehrsatz.....	50
2.5	Ein Exkurs über Evidenz und Wahrheit.....	57
2.6	Ein Axiomensystem für die natürlichen Zahlen.....	60
2.6.1	Was sind die natürlichen Zahlen?.....	60
2.6.2	Die Peano-Axiome.....	62
2.6.3	Modelle zu den Peano-Axiomen.....	65
2.6.4	Mengentheoretische Begründung von \mathbb{N}	65
2.7	Übungsaufgaben.....	67

3	Zahldarstellungen und Stellenwertsysteme	
3.1	Beispiele für Zahldarstellungen	73
3.2	Division mit Rest	77
3.3	Die Kreuzprobe	81
3.3.1	Das Prinzip der Kreuzprobe	81
3.3.2	Die Begründung der Kreuzprobe	82
3.4	Zahldarstellung in g-adischen Systemen	84
3.5	Rechnen in Stellenwertsystemen	88
3.5.1	Addition und Subtraktion in g-adischen Systemen	89
3.5.2	Multiplikation und Division in g-adischen Systemen	91
3.6	Übungsaufgaben	94
4	Teilbarkeit und Primzahlen	
4.1	Teilbarkeit in \mathbb{N}	97
4.2	Primzahlen	101
4.2.1	Das Sieb des Eratosthenes	102
4.2.2	Die Unendlichkeit der Menge der Primzahlen	104
4.2.3	Primzahlzwillinge, Primzahl tupel, Primzahlformeln	106
4.2.4	Primfaktorzerlegung	107
4.3	Teilbarkeit und Primfaktoren in \mathbb{Z}	114
4.4	Übungsaufgaben	122
5	Teiler und Vielfache	
5.1	Der größte gemeinsame Teiler in \mathbb{Z}	127
5.2	Der euklidische Algorithmus	133
5.3	Das kleinste gemeinsame Vielfache in \mathbb{Z}	139
5.4	Vollkommene Zahlen	142
5.5	Übungsaufgaben	150
6	Ganze Zahlen	
6.1	Definition der ganzen Zahlen	155
6.2	Rechnen mit ganzen Zahlen	162
6.3	Die isomorphe Einbettung der natürlichen in die ganzen Zahlen	167
6.4	Die Anordnung der ganzen Zahlen	173
6.5	Übungsaufgaben	175
7	Restklassen	
7.1	Kongruenzen	179
7.2	Verknüpfungen von Restklassen	185
7.2.1	Der Ring \mathbb{Z}_m der Restklassen modulo m	193
7.3	Teilbarkeitsregeln	195

7.3.1	Quersummenregeln.....	196
7.3.2	Endstellenregeln	199
7.3.3	Zusammengesetzte Teilbarkeitsregeln	200
7.4	Pseudozufallszahlen und Kongruenzen	200
7.4.1	Die Erzeugung von Pseudozufallszahlen	202
7.5	Übungsaufgaben	203
8	Lineare und quadratische Kongruenzen	
8.1	Lineare Kongruenzen und ihre Lösbarkeit	207
8.2	Anwendungen linearer Kongruenzen.....	212
8.3	Sätze von Euler	216
8.4	Chinesischer Restsatz.....	220
8.5	Quadratische Kongruenzen	222
8.6	Übungsaufgaben	232
9	Teilbarkeit in Integritätsringen	
9.1	Integritätsringe.....	236
9.2	Einheiten, Teiler und assoziierte Elemente	241
9.3	Primelemente	251
9.4	Nebenklassen, Ideale und Hauptidealringe	258
9.5	Eigenschaften von Hauptidealringen.....	266
9.6	Übungsaufgaben	271
10	Anwendungen der elementaren Zahlentheorie	
10.1	Verwaltung von Lagerbeständen	275
10.1.1	EAN (European Article Number)	276
10.1.2	ISBN (International Standard Book Number)	278
10.2	Kryptographie.....	281
10.2.1	Einheiten in \mathbb{Z}_{pq}	287
10.2.2	Grundlagen des RSA-Verfahrens	287
10.2.3	Praktische Zahlenkodierung	289
10.2.4	Ein Beispiel zur Kodierung und Dekodierung.....	290
10.2.5	Praktische Textkodierung.....	291
10.3	Übungsaufgaben	295
11	Rationale Zahlen	
11.1	Definition der rationalen Zahlen.....	299
11.2	\mathbb{Q} ist eine große Menge: Dezimaldarstellung.....	309
11.3	\mathbb{Q} ist eine kleine Menge: Abzählbarkeit	318
11.3.1	Abzählen nach der Summe von Zähler und Nenner	320
11.3.2	Die Abzählbarkeit der rationalen Zahlen.....	322

11.4	\mathbb{Q} ist eine kleine Menge: Rationale und reelle Zahlen	324
11.5	Kettenbrüche	329
11.5.1	Darstellung von rationalen Zahlen durch Kettenbrüche	332
11.5.2	Darstellung von irrationalen Zahlen durch Kettenbrüche	334
11.6	Übungsaufgaben	335
12	Reelle Zahlen	
12.1	Konvergenz	341
12.2	Die Erweiterung von \mathbb{Q} auf \mathbb{R}	352
12.3	Nachweis des Grenzwerts	359
12.4	Übungsaufgaben	365
13	Komplexe Zahlen	
13.1	Definition der komplexen Zahlen	370
13.1.1	Die Zahlenebene	370
13.1.2	Polarkoordinaten	371
13.2	Addition und Multiplikation	375
13.3	Reelle Zahlen sind komplexe Zahlen	378
13.4	Rechnen mit komplexen Zahlen	380
13.5	Quadratische Gleichungen	385
13.6	Gleichungen höherer Ordnung	390
13.7	Übungsaufgaben	395
14	Zahlentheoretische Funktionen	
14.1	Begriffsbestimmung	399
14.2	Primzahlverteilung	400
14.3	Die Euler'sche φ -Funktion	402
14.4	Die Riemann'sche ζ -Funktion	410
14.4.1	Ungerade natürliche Zahlen und die Riemann'sche ζ -Funktion	412
14.4.2	Zusammenhänge der Riemann'schen ζ -Funktion mit den Primzahlen	412
14.5	Übungsaufgaben	415

Inhaltsverzeichnis

XV

Lösungshinweise zu den Übungsaufgaben	419
Lösungen zu den Übungsaufgaben	433
Literaturverzeichnis	471
Index	473