

Inhaltsverzeichnis

1	Regelmäßige Vielecke und Sterne	1
1.1	Eigenschaften regelmäßiger Sterne	1
1.2	Sterne zeichnen	7
1.3	Diagonalen in einem regelmäßigen n -Eck	9
1.4	Zackenwinkel im regelmäßigen n -zackigen Stern	11
1.5	Aufgesetzte n -zackige Sterne	15
1.6	Regelmäßige n -Ecke in der Gauß'schen Zahlenebene	16
1.7	Spielpläne mithilfe von regelmäßigen n -Ecken aufstellen	21
1.8	Hinweise auf weiterführende Literatur	23
2	Muster aus bunten Steinen	25
2.1	Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen	25
2.2	Die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen	30
2.3	Quotienten von Summen ungerader natürlicher Zahlen	33
2.4	Darstellung einer natürlichen Zahl als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen	35
2.5	Summe der ersten n Quadratzahlen von natürlichen Zahlen	41
2.6	Summe der ersten n Kubikzahlen von natürlichen Zahlen	44
2.7	Pythagoreische Zahlentripel	50
2.8	Hinweise auf weiterführende Literatur	58
3	Zerlegung von Rechtecken in möglichst große Quadrate	59
3.1	Ein Spiel mit einem Rechteck	59
3.2	Rechnerische Untersuchung des Spiels – Beschreibung mithilfe von Kettenbrüchen	62
3.3	Zusammenhang zwischen der Kettenbruchentwicklung und den Rechteckseiten	64
3.4	Die Zerlegung besonderer Rechtecke – Fibonacci-Rechtecke	65
3.5	Die Folge der Fibonacci-Zahlen	67
3.6	Zusammenhang mit dem Euklidischen Algorithmus	70

3.7	Beispiele unendlicher Folgen von Rechteckzerlegungen	73
3.8	Bestimmung der Kettenbrüche von Quadratwurzeln.	77
3.9	Hinweise auf weiterführende Literatur	79
4	Kreise und Kreisringe.	81
4.1	Die Kreiszahl π – Umfang und Flächeninhalt eines Kreises.	81
4.2	Kreisringe.	83
4.3	Verschobene Halbkreise.	86
4.4	Flechtbänder.	89
4.5	Laufbahnen	89
4.6	Hinweise auf weiterführende Literatur	91
5	Pentominos und ähnliche Puzzles	93
5.1	Einfache Polyominos	93
5.2	Pentominos.	96
5.3	Hexominos.	104
5.4	Hinweise auf weiterführende Literatur	105
6	Fadenbilder	107
6.1	Grundfigur Kreis – Seiten und Diagonalen in regelmäßigen Vielecken.	107
6.2	Grundfigur Quadrat	109
6.3	Exkurs: Einhüllende einer Funktionenschar	113
6.4	Verfolgungskurven.	118
6.5	Grundfigur Kreis: Epizykloide.	120
6.6	Grundfigur zueinander senkrechte Achsen: Astroide.	122
6.7	Hinweise auf weiterführende Literatur	124
7	Rechnen mit Quadratzahlen – Zahlenzyklen.	125
7.1	Rechnen mit Quadratzahlen.	126
7.2	Zahlenzyklen	133
7.3	Zahlenzyklen modulo n	136
7.4	Zahlenzyklen bei höheren Potenzen	138
7.5	Hinweise auf weiterführende Literatur	142
8	Flächenaufteilungen	143
8.1	Fortgesetzte Halbierungen	143
8.2	Fortgesetzte Dreiteilungen.	145
8.3	Fortgesetzte Vierteilungen	147
8.4	Fortgesetzte Fünfteilungen.	149
8.5	Fortgesetzte Teilungen in n gleich große Teilflächen.	151
8.6	Geometrische Folgen und Reihen	152
8.7	Zerlegung von regelmäßigen n -Ecken in gleich große Teilflächen . . .	154
8.8	Hinweise auf weiterführende Literatur	157

9	Wiegen im 3er-System	159
9.1	Lösung der einfachen Fälle des Wägeproblems	160
9.2	Lösung der übrigen Fälle des Wägeproblems	161
9.3	Darstellung natürlicher Zahlen im 3er-System	163
9.4	Zusammenhang zwischen den beiden Darstellungen	164
9.5	Hinweise auf weiterführende Literatur	166
10	Parkettieren von regelmäßigen $2n$-Ecken mithilfe von Rauten	167
10.1	Parkettierung eines regelmäßigen 10-Ecks	168
10.2	Anwenden der Parkettierungsmethode auf andere regelmäßige $2n$ -Ecke	169
10.3	Verallgemeinerungen der beobachteten Gesetzmäßigkeiten	171
10.4	Anleitung zum Basteln der Rauten-Puzzles	173
10.5	Alternative Auslegungen des regelmäßigen 10-Ecks mit Rauten	174
10.6	Zentralsymmetrische Parkettierung der regelmäßigen $2n$ -Ecke von innen nach außen	176
10.7	Zentralsymmetrische Parkettierung der regelmäßigen $2n$ -Ecke von außen nach innen	178
10.8	Rauten-Parkettierungen für regelmäßige 5-Ecke, 7-Ecke, 9-Ecke usw.	181
10.9	Hinweise auf weiterführende Literatur	182
11	Geometrische Figuren auf kariertem Papier und auf einem Quadratgitter	183
11.1	Rechtecke mit vorgegebenem Flächeninhalt	184
11.2	Rechtecke mit gleichem Umfang	187
11.3	Besondere Rechtecke: Das $16er-4 \times 4$ -Rechteck und das $18er-3 \times 6$ -Rechteck	190
11.4	Veränderungen an der Rechteckfigur	192
11.5	Untersuchungen zum Satz von Pick	197
11.6	Eine Regel für rechtwinklige Vielecke	200
11.7	Überprüfung der Pick'schen Regel für schräg abgeschnittene Dreiecke	202
11.8	Überlegungen zu einem allgemeinen Beweis des Satzes von Pick	203
11.9	Hinweise auf weiterführende Literatur	209
12	Augensummen	211
12.1	Augensummen beim Werfen von zwei regelmäßigen Hexaedern	212
12.2	Augensummen beim Werfen von mehreren regelmäßigen Hexaedern	214
12.3	Eine fehlerhafte Vorstellung über Augensummen	216
12.4	Ein faires Würfelspiel mit Augensummen	219

12.5	Die Sicherman-Würfel	220
12.6	Weitere Ersatz-Zufallsgeräte für den Doppelwurf	221
12.7	Algebraischer Hintergrund für die verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten	224
12.8	Wahrscheinlichkeitsverteilung der Augensummen beim n -fachen Würfeln	228
12.9	Wahrscheinlichkeitsverteilungen der platonischen Körper	230
12.10	Vergleich von Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit gleichen Augensummen	232
12.11	Ein Beispiel zum Zentralen Grenzwertsatz	234
12.12	Bestimmen von Augensummen mithilfe von Markow-Ketten	237
12.13	Hinweise auf weiterführende Literatur	239
13	Das verschwundene Quadrat	241
13.1	Scheinbar zueinander kongruente Figuren	242
13.2	Das verschwundene Quadrat im Zusammenhang mit dem Höhensatz des Euklid.	247
13.3	Das verschwundene Quadrat im Zusammenhang mit anderen Methoden Euklids	252
13.4	Weitere Eigenschaften der Folge der Fibonacci-Zahlen	254
13.5	Anordnung von Sam Loyd	256
13.6	Weitere geeignete Zahlentripel	257
13.7	Das verschwundene Quadrat im Zusammenhang mit dem Satz von Pythagoras	258
13.8	Hinweise auf weiterführende Literatur	260
14	Zerlegen von Rechtecken in lauter verschiedene Quadrate	261
14.1	Rechtecke, die sich in neun bzw. zehn verschieden große Quadrate zerlegen lassen	262
14.2	Bestimmen der Seitenlängen zu einer gegebenen Zerlegung	264
14.3	Einführung der Bouwkamp-Notation zur Beschreibung einer Zerlegung	268
14.4	Quadrate, die man in lauter verschieden große Quadrate zerlegen kann	271
14.5	Zusammenhang mit elektrischen Netzwerken	275
14.6	Ein Spiel mit Rechteckzerlegungen	276
14.7	Hinweise auf weiterführende Literatur	277
15	Kissing Circles	279
15.1	Untersuchung sich berührender Kreise mithilfe trigonometrischer Methoden	280
15.2	Der Vier-Kreise-Satz von Descartes	282
15.3	Bestimmung von Beispielen mit ganzzahligen Radien	286
15.4	Pappos-Ketten	290

15.5	Berührende Kreise mit Krümmung 0	293
15.6	Sangaku	295
15.7	Hinweise auf weiterführende Literatur	303
16	Summen von Potenzen aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen	305
16.1	Herleitung von Summenformeln mithilfe arithmetischer Folgen höherer Ordnung	308
16.2	Koeffizientenbestimmung durch Vergleich aufeinanderfolgender Glieder der Summenfolge	314
16.3	Alhazens Herleitung der Summenformeln für höhere Potenzen	316
16.4	Thomas Harriot entdeckt den Zusammenhang zwischen Dreiecks- und Tetraederzahlen.	320
16.5	Fermats Entdeckung.	324
16.6	Pascals Methode zur Bestimmung von Formeln für Potenzsummen	327
16.7	Darstellung der Potenzsummen-Formeln mithilfe der Bernoulli-Zahlen	328
16.8	Bestimmung von Potenzsummen-Formeln mithilfe der Lagrange-Interpolation	330
16.9	Hinweise auf weiterführende Literatur	331
17	Der Satz des Pythagoras	333
17.1	Der Satz des Pythagoras und die klassischen Beweise von Euklid	333
17.2	„Schöne“ Beweise des Satzes von Pythagoras.	339
17.3	Zerlegungsbeweise des Satzes von Pythagoras Zerlegungsbeweise des Satzes von Pythagoras	341
17.4	Darstellung der Zerlegungsbeweise mithilfe von Fliesenmustern	345
17.5	Einige Beweise von historischer Bedeutung	346
17.6	Unendliche Folgen im Zusammenhang mit dem Satz von Pythagoras	350
17.7	Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras	352
17.8	Die Mönchen des Hippokrates von Chios und andere Kreisfiguren	353
17.9	Anwendung des Satzes von Pythagoras bei Vierecken	357
17.10	Ganzzahlige Pythagoras-Partner und besondere Pythagoras-Folgen	359
17.11	Heron'sche Dreiecke	364
17.12	Briefmarken zu Pythagoras	367
17.13	Hinweise auf weiterführende Literatur	369
	Allgemeine Hinweise auf geeignete Literatur	371
	Stichwortverzeichnis	373