

Inhaltsverzeichnis

1	Vorkurs	1
1.1	Auffrischung	1
1.1.1	Funktionen	1
1.1.2	Von den Zahlen	2
1.1.3	Gleichungen	3
1.1.3.1	Quadratische Gleichungen	3
1.1.3.2	Beispiele zur üübenden Erläuterung	4
1.1.3.3	Quadratische Standardgleichung	6
1.1.3.4	Biquadratische Gleichungen	7
1.1.3.5	Gleichungssysteme	7
1.1.4	Kleine Größen	8
1.1.4.1	Rechenregeln	8
1.1.4.2	Taylorentwicklung	9
1.1.4.3	Physikalische Fehlerrechnung	10
1.1.5	Kurvendiskussion	13
1.1.5.1	Lineare und umgekehrt proportionale Abhängigkeit	13
1.1.5.2	Monotone und nicht monotone Funktionen	13
1.1.5.3	Maxima und Minima	16
1.1.5.4	Kubische Gleichungen	17
1.1.5.5	Allgemeine Verläufe von Funktionen	20
1.1.5.6	Beispiele von Kurvenverläufen zur Vertiefung des Besprochenen	20
1.1.5.7	Maxima/Minima mit Nebenbedingungen	21
1.2	Komplexe Zahlen	23
1.2.1	Imaginäre Einheit i	23
1.2.2	Definitionen und Rechenregeln im Komplexen	24

1.2.3	Die Polardarstellung	26
1.2.4	Beispiele zur übenenden Erläuterung	29
1.2.5	Die komplexe Zahlenebene	30
1.2.6	Übungen zum Selbsttest: komplexe Zahlen	32
2	Vektoren	33
2.1	Definition von Vektoren	33
2.1.1	Skalare	33
2.1.2	Vektoren	34
2.1.2.1	Vorläufiges	34
2.1.2.2	Bezugssysteme	35
2.1.2.3	Komponenten	36
2.1.2.4	Koordinatentransformationen	38
2.1.2.5	Vektordefinition	39
2.1.3	Tensoren	41
2.2	Addition von Vektoren und Multiplikation mit Zahlen	43
2.2.1	Addieren und Subtrahieren	44
2.2.2	Übungen zum Selbsttest: Vektoraddition	46
2.2.3	Multiplikation von Vektoren mit Zahlen	46
2.2.4	Komponentendarstellung der Vektoren	49
2.2.4.1	Einheitsvektoren	49
2.2.4.2	Komponenten	49
2.2.4.3	Umrechnung zwischen Komponenten- und Pfeildarstellung	50
2.2.5	Rechenregeln in Komponentendarstellung	52
2.2.5.1	Addition und Subtraktion	53
2.2.5.2	Multiplikation mit Zahlen	54
2.2.5.3	Beispiele zur übenenden Erläuterung	54
2.2.6	Übungen zum Selbsttest: Vektoralgebra	55
2.3	Das Innere Produkt von Vektoren	56
2.3.1	Definition	57
2.3.2	Eigenschaften des Inneren Produktes	57
2.3.3	Beispiele zur übenenden Erläuterung	60
2.3.4	Algebraische Definition des Vektorraumes	62
2.3.5	Übungen zum Selbsttest: Inneres Produkt	63
2.4	Koordinatentransformationen	64
2.4.1	Die Transformationsmatrix	64
2.4.1.1	Beschreibung einer Koordinatendrehung	64
2.4.1.2	Zuordnung von Drehungen und Matrizen	66
2.4.1.3	Die Determinante der Drehmatrix	66
2.4.2	Die Transformationsformeln für Vektoren	68
2.4.3	Beispiele zur übenenden Erläuterung	70

2.4.4	Die Transformationsformeln für Tensoren	71
2.4.5	Übungen zum Selbsttest: Koordinatentransformationen	72
2.5	Matrizen	73
2.5.1	Definitionen	73
2.5.2	Multiplikation von Matrizen	75
2.5.3	Inverse Matrizen	78
2.5.4	Matrizen – Tensoren – Transformationen	80
2.5.5	Beispiele zur üben Erläuterung	81
2.5.6	Übungen zum Selbsttest: Matrizen	83
2.6	Determinanten	84
2.6.1	Definition	84
2.6.2	Eigenschaften von Determinanten	87
2.6.3	Beispiele zur üben Erläuterung	90
2.6.4	Übungen zum Selbsttest: Determinanten	92
2.7	Das Äußere Produkt von Vektoren	94
2.7.1	Definition	94
2.7.2	Eigenschaften des Äußeren Produktes	95
2.7.3	Komponentendarstellung des Äußeren Produktes, Transformationsverhalten	98
2.7.4	Beispiele zur üben Erläuterung	100
2.7.5	Übungen zum Selbsttest: Äußeres Produkt	103
2.8	Mehrfache Vektorprodukte	103
2.8.1	Grundregeln	103
2.8.2	Spatprodukt dreier Vektoren	104
2.8.3	Entwicklungssatz für 3-fache Vektorprodukte	105
2.8.4	n -fache Produkte	106
2.8.5	Beispiele zur üben Erläuterung	107
2.8.6	Übungen zum Selbsttest: Mehrfachprodukte	108
2.9	Eigenwerte, Eigenvektoren	108
2.9.1	Physikalische Motivation	108
2.9.1.1	Drehungen	108
2.9.1.2	Der Trägheitstensor von Körpern	109
2.9.1.3	Ein physikalisches Alltagsproblem	110
2.9.2	Eigenwerte: Definition und Berechnung	112
2.9.3	Beispiele zur üben Erläuterung	113
2.9.4	Eigenschaften von Eigenwerten und Eigenvektoren	115
2.9.5	Übungen zum Selbsttest: Eigenwerte und -vektoren	117
3	Vektorfunktionen	119
3.1	Vektorwertige Funktionen	119
3.1.1	Definition	119
3.1.2	Parameterdarstellung von Raumkurven	120

3.2	Ableitung vektorwertiger Funktionen	123
3.2.1	Definition der Ableitung	123
3.2.2	Beispiele zur üben Erläuterung	124
3.2.3	Rechenregeln für die Vektordifferentiation	127
3.2.4	Übungen zum Selbsttest: Ableitung von Vektoren	127
3.3	Raumkurven	128
3.3.1	Bogenmaß und Tangenten-Einheitsvektor	129
3.3.2	Die (Haupt-)Normale	129
3.3.3	Die Binormale	131
3.3.4	Frenetsche Formeln für das begleitende Dreibein	132
3.3.5	Beispiele zur üben Erläuterung	133
3.3.6	Übungen zum Selbsttest: Raumkurven	133
4	Felder	135
4.1	Physikalische Felder	135
4.1.1	Allgemeine Definition	135
4.1.2	Skalare Felder	137
4.1.3	Vektorfelder	138
4.1.4	Übungen zum Selbsttest: Darstellung von Feldern	142
4.2	Partielle Ableitungen	142
4.2.1	Definition der partiellen Ableitung	143
4.2.2	Beispiele – Rechenregeln – Übungen	144
4.2.3	Die Kettenregel	147
4.2.4	Übungen zum Selbsttest: Partielle Ableitungen	148
4.3	Gradient	148
4.3.1	Richtungsableitung	148
4.3.2	Definition des Gradienten	150
4.3.3	Interpretation und Rechenregeln	151
4.3.4	Beispiele zur üben Erläuterung	152
4.3.5	Taylorentwicklung für Felder	153
4.3.6	Übungen zum Selbsttest: Der Gradient	157
4.4	Divergenz	157
4.4.1	Definition der Divergenz von Vektorfeldern	157
4.4.2	Beispiele und Rechenregeln	158
4.4.3	Interpretation als lokale Quellstärke	159
4.4.4	Übungen zum Selbsttest: Die Divergenz	162
4.5	Rotation	162
4.5.1	Definition der Rotation von Vektorfeldern	162
4.5.2	Interpretation von $\text{rot } \vec{A}$ als lokale Wirbelstärke	163
4.5.3	Eigenschaften und Rechenregeln der Operation rot	165
4.5.4	Beispiele zur üben Erläuterung	166
4.5.5	Übungen zum Selbsttest: Die Rotation	167

4.6	Der Vektor-Differentialoperator $\vec{\nabla}$ (Nabla)	168
4.6.1	Formale Zusammenfassung der Vektor-Differentialoperationen durch $\vec{\nabla}$	168
4.6.2	Zusammenfassende Übersicht der Eigenschaften von $\vec{\nabla}$	169
4.6.3	Übungen zum Selbsttest: Der Nabla-Operator	170
5	Integration	171
5.1	Physikalische Motivation	171
5.2	Das Integral über Funktionen	177
5.2.1	Definition des (bestimmten) Riemannintegrals	177
5.2.2	Eigenschaften des bestimmten Integrals	180
5.2.3	Übungen zum Selbsttest: Riemannsummen	182
5.2.4	Das unbestimmte Integral	183
5.2.5	Tabelle einfacher Integrale	186
5.2.6	Übungen zum Selbsttest: Integrale	186
5.3	Methoden zur Berechnung von Integralen	187
5.3.1	Substitution	188
5.3.2	Partielle Integration	190
5.3.3	Übungen zum Selbsttest: Substitution, partielle Integration	191
5.3.4	Integralfunktionen	192
5.3.5	Numerische Bestimmung von Integralen	193
5.4	Uneigentliche Integrale	194
5.4.1	Definition uneigentlicher Integrale mit unendlichen Grenzen	195
5.4.2	Beispiele zur übenden Erläuterung	196
5.4.3	Singuläre Integranden	197
5.4.4	Beispiele zur übenden Erläuterung	199
5.4.5	Übungen zum Selbsttest: Uneigentliche Integrale	200
5.5	Parameterintegrale	201
5.5.1	Differentiation eines Parameterintegrals	202
5.5.2	Integration von Parameterintegralen	204
5.5.3	Uneigentliche Parameterintegrale	205
5.5.4	Übungen zum Selbsttest: Parameterintegrale	206
5.6	Die δ -Funktion	207
5.6.1	Heuristische Motivation	207
5.6.2	Definition der δ -Funktion	209
5.6.3	Darstellung durch „glatte“ Funktionen	209
5.6.4	Praktischer Umgang	211
5.6.5	Übungen zum Selbsttest: δ -Funktion	212
6	Vektorintegration	215
6.1	(Gewöhnliches) Integral über Vektoren	215
6.1.1	Definition	215

6.1.2	Beispiele zur übenden Erläuterung	216
6.1.3	Übungen zum Selbsttest: Integral über Vektoren	217
6.2	Kurvenintegrale	218
6.2.1	Definition	218
6.2.2	Verfahren zur Berechnung	219
6.2.3	Beispiele zur übenden Erläuterung	221
6.2.4	Kurvenintegrale über Gradientenfelder: Unabhängigkeit vom Weg	223
6.2.5	Wirbelfreiheit als Kriterium	227
6.2.6	Beispiel zur übenden Erläuterung	232
6.2.7	Kurvenintegrale mit anderem Vektorcharakter: Skalare Felder, Vektorprodukte	234
6.2.8	Übungen zum Selbsttest: Kurvenintegrale	235
6.2.9	Das Vektorpotenzial	236
6.3	Flächenintegrale	239
6.3.1	Definition	239
6.3.2	Beschreibung von Flächen im Raum	242
6.3.2.1	Kartesische Koordinaten	242
6.3.2.2	Zylinderkoordinaten	244
6.3.2.3	Kugelkoordinaten	245
6.3.2.4	Übungen zum Selbsttest: Krummlinige Koordinaten	246
6.3.2.5	Flächenelemente	246
6.3.3	Doppelintegrale	248
6.3.3.1	Definition	248
6.3.3.2	Iterierte Integrale	249
6.3.3.3	Übungen zum Selbsttest: Doppelintegrale	250
6.3.4	Wechsel der Variablen	250
6.3.4.1	Parametertransformation	251
6.3.4.2	Die Funktionaldeterminante	251
6.3.4.3	Die Transformation von Flächenelementen	253
6.3.4.4	Übungen zum Selbsttest: Variablentransformation	255
6.3.5	Berechnung von Flächenintegralen	255
6.3.5.1	Zusammenfassung der Formeln	255
6.3.5.2	Beispiele zur übenden Erläuterung	256
6.3.5.3	Flächenintegrale in Parameterdarstellung	258
6.3.5.4	Beispiele zur übenden Erläuterung	262
6.3.6	Übungen zum Selbsttest: Flächenintegrale	265
6.4	Volumenintegrale	265
6.4.1	Definition	265
6.4.2	Dreifachintegrale	266
6.4.3	Wechsel der Variablen	268
6.4.3.1	Funktionaldeterminante	268

6.4.3.2	Transformation von Volumenelementen	270
6.4.4	Vektorielle Volumenintegrale	272
6.4.5	Beispiele zur übenenden Erläuterung	272
6.4.6	Übungen zum Selbsttest: Volumenintegrale	274
7	Die Integralsätze	277
7.1	Die Darstellung des Nabla-Operators durch den Limes von Flächenintegralen	277
7.1.1	Integraldarstellung von div	278
7.1.2	Integraldarstellung von $\vec{\nabla}$ allgemein	280
7.2	Der Gaußsche Satz	281
7.2.1	Herleitung und Formulierung	281
7.2.2	Beispiele und Erläuterungen	283
7.2.3	Allgemeine Form des Gaußschen Satzes	285
7.2.4	Der Gaußsche Satz in D Dimensionen	286
7.3	Partielle Integration mittels Gaußschem Satz	288
7.3.1	Methode	288
7.3.2	Beispiele	288
7.3.3	Der Greensche Satz	289
7.4	Übungen zum Selbsttest: Gaußscher Satz	290
7.5	Die Darstellung des Nabla-Operators durch den Limes von Kurvenintegralen	291
7.5.1	Kurvenintegral-Darstellung von rot	291
7.5.2	Kurvenintegral-Darstellung von $\vec{\nabla}$ allgemein	293
7.6	Der Stokessche Satz	294
7.6.1	Herleitung und Formulierung	294
7.6.2	Beispiele und Erläuterungen	296
7.6.3	Allgemeine Form des Stokesschen Satzes	298
7.6.4	Der Stokessche Satz in D Dimensionen	299
7.7	Übungen zum Selbsttest: Stokesscher Satz	300
7.8	Die Integralsätze in $D = 4$ Dimensionen	301
8	Krummlinige Koordinaten	303
8.1	Lokale Koordinatensysteme	303
8.1.1	Das Linienelement in krummlinigen Koordinaten	303
8.1.2	Krummlinig-orthogonale Koordinaten	305
8.1.3	Zylinder- und Kugelkoordinaten als Beispiele	306
8.1.4	Übungen zum Selbsttest: Krummlinig-orthogonale Koordinatensysteme	307
8.2	Differentialoperatoren in krummlinig-orthogonalen Koordinaten	308
8.2.1	grad , div , rot , Δ allgemein	308

8.2.2	Die Formeln in Zylinderkoordinaten	310
8.2.3	Die Formeln in Kugelkoordinaten	311
8.2.4	Übungen zum Selbsttest: Differentialoperationen in krummlinigen Koordinaten	312
9	Gewöhnliche Differentialgleichungen	313
9.1	Physikalische Motivation	314
9.2	Lösen von Differentialgleichungen	318
9.3	Trennung der Variablen	319
9.3.1	Verfahren	319
9.3.2	Beispiele zur übenden Erläuterung	321
9.3.3	Separable Differentialgleichungen	325
9.4	Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung	326
9.5	Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung	328
9.5.1	Homogene Gleichungen	328
9.5.2	Gekoppelte homogene Differentialgleichungen (N Variable)	331
9.5.3	Inhomogene Differentialgleichungen	333
9.6	Geometrische Methoden	334
9.7	Chaos	337
9.8	Iterative Lösungsverfahren (Algorithmen)	343
9.8.1	Euler-Cauchysches Polygonzugverfahren	343
9.8.2	Integralgleichungsverfahren	344
9.8.3	Praxis iterativer Verfahren	346
9.9	Übungen zum Selbsttest: Differentialgleichungen	347
10	Randwertprobleme	351
10.1	Die Rolle der Randbedingungen; Eindeutigkeitssatz	351
10.2	Bestimmung eines wirbelfreien Feldes aus seinen Quellen und Randwerten	355
10.2.1	Feld einer Ladungsverteilung im unendlichen Raum	356
10.2.2	Feld einer Ladungsverteilung bei endlichem Rand; Greensche Funktionen	358
10.3	Wirbel- und quellenfreie Vektorfelder	363
10.4	Bestimmung eines quellenfreien (inkompressiblen) Feldes aus seinen Wirbeln	364
10.4.1	Wirbelfeld im unendlichen Raum	365
10.4.2	Wirbelfeld im endlichen Bereich	367
10.5	Der (Helmholtzsche) Hauptsatz der Vektoranalysis	368
10.6	Vektordifferentialgleichungen	369
10.6.1	Elektromagnetische Felder	370
10.6.1.1	Statische elektromagnetische Felder	370
10.6.1.2	Feldgetriebene Ströme in Leitern	372

10.6.1.3 Elektromagnetische Wellen	374
10.6.2 Elastische Körper	375
10.6.3 Flüssigkeitsströmungen	377
10.6.4 Reduktion der Vektorpotenzialgleichung auf eine Amplitudengleichung	379
10.6.5 Zusammenfassung in Darstellungssätzen	383
Lösungen der Übungen zum Selbsttest	385
Kleine Literaturauswahl	399
Sachwortverzeichnis	401