
Inhaltsverzeichnis

1	Zahlen	1
1.1	Natürliche Zahlen	1
1.1.1	Konstruktion und Eigenschaften	2
1.1.2	Stellenwertsysteme	5
1.1.3	Die Peano-Axiome	7
1.1.4	Aufgaben	8
1.2	Ganze Zahlen	9
1.2.1	Konstruktion und Eigenschaften	9
1.2.2	Teilbarkeit in $\mathbb{Z}$	14
1.2.3	Der Euklidische Algorithmus	16
1.2.4	Lineare diophantische Gleichungen	23
1.2.5	Primzahlen	27
1.2.6	Die Euler'sche φ -Funktion	30
1.2.7	Aufgaben	31
1.3	Restklassenringe	33
1.3.1	Konstruktion und Eigenschaften	33
1.3.2	Lösen linearer Gleichungen	38
1.3.3	Bekannte Teilbarkeitsregeln	42
1.3.4	Der Chinesische Restsatz	43
1.3.5	Fehlererkennende Codes	46
1.3.6	Aufgaben	49
1.4	Rationale Zahlen	50
1.4.1	Konstruktion und Eigenschaften	50
1.4.2	Zwei Irrationalitätsbeweise	54
1.4.3	Aufgaben	55
1.5	Reelle Zahlen	56
1.5.1	Konstruktion und Eigenschaften	57
1.5.2	Reelle Nullstellen zählen	61
1.5.3	Stellenwertsysteme reloaded	64
1.5.4	Aufgaben	68
1.6	Komplexe Zahlen	69
1.6.1	Konstruktion und Eigenschaften	69
1.6.2	Polarkoordinaten	75
1.6.3	Wurzeln	78

1.6.4	Der Fundamentalsatz der Algebra	82
1.6.5	Aufgaben.	84
1.7	Quaternionen	85
1.7.1	Konstruktion und Eigenschaften.	85
1.7.2	Aufgaben.	89
2	Algebra	91
2.1	Gruppen	94
2.1.1	Grundbegriffe	95
2.1.2	Die Permutationsgruppe	98
2.1.3	Endliche Gruppen	103
2.1.4	Untergruppen	104
2.1.5	Nebenklassen und Faktorgruppen.	110
2.1.6	Gruppenhomomorphismen	117
2.1.7	Die RSA-Verschlüsselung	123
2.1.8	Aufgaben.	126
2.2	Ringe.	127
2.2.1	Grundbegriffe	127
2.2.2	Integritätsbereiche.	131
2.2.3	Der Polynomring in einer Variablen	134
2.2.4	Quotientenkörper	145
2.2.5	Ideale, Faktorringe und Teilbarkeit.	150
2.2.6	Systeme linearer Gleichungen über Hauptidealringen	162
2.2.7	Euklidische Ringe.	167
2.2.8	Faktorielle Ringe.	177
2.2.9	Faktorisierung und Irreduzibilitätskriterien	194
2.2.10	Aufgaben.	217
2.3	Körper.	220
2.3.1	Grundbegriffe	221
2.3.2	Algebraische und transzendente Elemente und das Minimalpolynom	226
2.3.3	Körpergrad	229
2.3.4	Einfache Körpererweiterungen	231
2.3.5	Algebraische Körpererweiterungen	236
2.3.6	Konstruktion mit Zirkel und Lineal	242
2.3.7	Algebraisch abgeschlossene Körper	247
2.3.8	Aufgaben.	251
	Literatur	253