

Inhaltsverzeichnis

1	Der Zahlenraum $\mathbb{R}^n$ und der Begriff des reellen Vektorraums	1
1.1	Lineare Gleichungssysteme	1
1.1.1	Beispiele und Spezialfälle	1
1.1.2	Die Eliminationsverfahren von GAUSS und GAUSS-JORDAN	15
	Aufgaben	28
1.2	Vektorrechnung im $\mathbb{R}^n$ und der Begriff des $\mathbb{R}$ -Vektorraums	30
1.2.1	Vektoren im $\mathbb{R}^n$, Hyperebenen und Gleichungen	30
1.2.2	Tupel-Vektorräume und der allgemeine $\mathbb{R}$ -Vektorraum	44
	Aufgaben	54
1.3	Lineare Unterräume und das Matrix-Vektor-Produkt	55
1.3.1	Erzeugendensystem und lineare Hülle	55
1.3.2	Das Matrix-Vektor-Produkt	62
	Aufgaben	74
1.4	Lineare (Un-)Abhängigkeit und Dimension	75
1.4.1	Lineare (Un-)Abhängigkeit und Dimension	75
1.4.2	Lineare Gleichungssysteme und ihre Unterräume I:	
	Dimensionsformeln	91
	Aufgaben	101
1.5	Das euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ und Vektorräume mit Skalarprodukt	103
1.5.1	Skalarprodukt, Norm und Winkel	103
1.5.2	Orthogonalität und orthogonale Projektion	110
	Aufgaben	131
1.6	Mathematische Modellierung: Diskrete lineare Probleme und ihre Herkunft	132
	Aufgaben	138
1.7	Affine Räume I	140
	Aufgaben	150
2	Matrizen und lineare Abbildungen	153
2.1	Lineare Abbildungen	153
2.1.1	Allgemeine lineare Abbildungen	153

2.1.2	Bewegungen und orthogonale Transformationen	162
	Aufgaben	171
2.2	Lineare Abbildungen und ihre Matrizendarstellung	173
2.2.1	Darstellungsmatrizen	173
2.2.2	Dimension und Isomorphie	182
	Aufgaben	189
2.3	Matrizenrechnung	191
2.3.1	Matrizenmultiplikation	191
2.3.2	Tensorprodukt von Vektoren und Projektionen	199
2.3.3	Invertierbare Matrizen	211
2.3.4	Das GAUSS-Verfahren vom Matrizenstandpunkt	218
2.3.5	Transponierte, orthogonale und symmetrische Matrix	223
	Aufgaben	245
2.4	Lösbare und nichtlösbare lineare Gleichungssysteme	247
2.4.1	Lineare Gleichungssysteme und ihre Unterräume II	247
2.4.2	Ausgleichsrechnung und Pseudoinverse	251
2.4.3	GAUSS-Verfahren und LR-Zerlegung I	266
	Aufgaben	275
2.5	Permutationsmatrizen und die LR-Zerlegung einer Matrix	277
2.5.1	Permutationen und Permutationsmatrizen	277
2.5.2	GAUSS-Verfahren und LR-Zerlegung II	284
	Aufgaben	293
2.6	Die Determinante	294
2.6.1	Motivation und Existenz	294
2.6.2	Eigenschaften	300
2.6.3	Orientierung und Determinante	316
	Aufgaben	321
2.7	Das Vektorprodukt	323
	Aufgaben	331
2.8	Affine Räume II	333
	Aufgaben	341
3	Vom $\mathbb{R}$-Vektorraum zum K-Vektorraum: Algebraische Strukturen	343
3.1	Gruppen und Körper	343
	Aufgaben	359
3.2	Vektorräume über allgemeinen Körpern	360
	Aufgaben	369
3.3	Euklidische und unitäre Vektorräume	370
	Aufgaben	383
3.4	Der Quotientenvektorraum	384
	Aufgaben	397
3.5	Der Dualraum	398
	Aufgaben	410

4	Eigenwerte und Normalformen von Matrizen	411
4.1	Basiswechsel und Koordinatentransformationen	411
	Aufgaben	424
4.2	Eigenwerttheorie	426
4.2.1	Definitionen und Anwendungen	426
4.2.2	Diagonalisierbarkeit und Trigonalisierbarkeit	450
	Aufgaben	470
4.3	Unitäre Diagonalisierbarkeit: Die Hauptachsentransformation	473
	Aufgaben	487
4.4	Blockdiagonalisierung aus der SCHUR-Normalform	488
4.4.1	Der Satz von CAYLEY-HAMILTON	488
4.4.2	Blockdiagonalisierung mit dem Satz von CAYLEY-HAMILTON	501
4.4.3	Algorithmische Blockdiagonalisierung – Die SYLVESTER-Gleichung	512
	Aufgaben	519
4.5	Die JORDANSche Normalform	521
4.5.1	Kettenbasen und die JORDANSche Normalform im Komplexen	521
4.5.2	Die reelle JORDANSche Normalform	542
4.5.3	Beispiele und Berechnung	549
	Aufgaben	562
4.6	Die Singulärwertzerlegung	564
4.6.1	Herleitung	564
4.6.2	Singulärwertzerlegung und Pseudoinverse	575
	Aufgaben	580
4.7	Positiv definite Matrizen und quadratische Optimierung	581
4.7.1	Positiv definite Matrizen	581
4.7.2	Quadratische Optimierung	593
4.7.3	Extremalcharakterisierung von Eigenwerten	603
	Aufgaben	607
4.8	Ausblick: Das Ausgleichsproblem und die QR-Zerlegung	609
5	Bilinearformen und Quadriken	613
5.1	α -Bilinearformen	613
5.1.1	Der Vektorraum der α -Bilinearformen	613
5.1.2	Orthogonales Komplement	622
	Aufgaben	632
5.2	Symmetrische Bilinearformen und hermitesche Formen	634
	Aufgaben	645
5.3	Quadriken	647
5.3.1	Die affine Normalform	650
5.3.2	Die euklidische Normalform	659
	Aufgaben	662
5.4	Alternierende Bilinearformen	664
	Aufgaben	671

6	Polyeder und lineare Optimierung	673
6.1	Elementare konvexe Geometrie	679
	Aufgaben	683
6.2	Polyeder	684
	Aufgaben	702
6.3	Beschränkte Polyeder	703
	Aufgaben	711
6.4	Das Optimierungsproblem	712
	Aufgaben	719
6.5	Ecken und Basislösungen	720
	Aufgaben	727
6.6	Das Simplex-Verfahren	728
	Aufgaben	736
6.7	Optimalitätsbedingungen und Dualität	737
	Aufgaben	749
7	Lineare Algebra und Analysis	751
7.1	Normierte Vektorräume	751
7.1.1	Analysis auf normierten Vektorräumen	751
7.1.2	Normen und Dimension	758
	Aufgaben	770
7.2	Normierte Algebren	771
7.2.1	Erzeugte und verträgliche Normen	771
7.2.2	Matrixpotenzen	781
	Aufgaben	806
7.3	HILBERT-Räume	808
7.3.1	Der RIESZsche Darstellungssatz und der adjungierte Operator	808
7.3.2	SCHAUDER-Basen	823
	Aufgaben	831
7.4	Ausblick: Lineare Modelle, nichtlineare Modelle, Linearisierung	832
	Aufgaben	835
8	Einige Anwendungen der Linearen Algebra	837
8.1	Lineare Gleichungssysteme, Ausgleichsprobleme und Eigenwerte unter Datenstörungen	837
8.1.1	Lineare Gleichungssysteme	837
8.1.2	Ausgleichsprobleme	846
8.1.3	Eigenwerte	850
	Aufgaben	854
8.2	Klassische Iterationsverfahren für lineare Gleichungssysteme und Eigenwerte	856
8.2.1	Das Page-Rank-Verfahren von Google	856
8.2.2	Linear-stationäre Iterationsverfahren für lineare Gleichungssysteme	861
8.2.3	Gradientenverfahren	870
8.2.4	Die Potenzmethode zur Eigenwertberechnung	878

Aufgaben	882
8.3 Datenanalyse, -synthese und -kompression	884
8.3.1 Wavelets	886
8.3.2 Diskrete FOURIER-Transformation	893
Aufgaben	901
8.4 Lineare Algebra und Graphentheorie	902
Aufgaben	908
8.5 (Invers-)Monotone Matrizen und Input-Output-Analyse	909
Aufgaben	923
8.6 Kontinuierliche und diskrete dynamische Systeme	924
8.6.1 Die Lösungsraumstruktur bei linearen Problemen	924
8.6.2 Stabilität: Asymptotisches Verhalten für große Zeiten	943
8.6.3 Approximation kontinuierlicher durch diskrete dynamische Systeme	959
8.6.4 Ausblick: Vom räumlich diskreten zum räumlich verteilten kontinuierlichen Modell	969
8.6.5 Stochastische Matrizen	974
Aufgaben	982
Literaturverzeichnis	983
Sachverzeichnis	985
Online-Appendix: Logisches Schließen und Mengenlehre	A-1
A.1 Aussagenlogik	A-1
A.2 Mengenlehre	A-6
A.3 Prädikatenlogik	A-10
A.4 Produkte von Mengen, Relationen und Abbildungen	A-12
A.5 Äquivalenz- und Ordnungsrelationen	A-19
Online-Appendix: Zahlenmengen und algebraische Strukturen	B-1
B.1 Von den PEANO-Axiomen zu den reellen Zahlen	B-1
B.2 Schreibweisen und Rechenregeln	B-8
B.3 (Formale) Polynome	B-11
Online-Appendix: Analysis in normierten Räumen	C-1