

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	1
1.1	Was ist Modellierung?	1
1.2	Aspekte der Modellierung am Beispiel der Populationsdynamik	3
1.3	Populationsmodell mit beschränkten Ressourcen	9
1.4	Dimensionsanalyse und Skalierung	12
1.5	Asymptotische Entwicklung	16
1.6	Anwendungen aus der Strömungsmechanik	25
1.7	Literaturhinweise	30
1.8	Aufgaben	30
<b>2</b>	<b>Lineare Gleichungssysteme</b>	35
2.1	Elektrische Netzwerke	35
2.2	Stabwerke	46
2.3	Optimierung mit Nebenbedingungen	59
2.4	Literaturhinweise	63
2.5	Aufgaben	63
<b>3</b>	<b>Grundzüge der Thermodynamik</b>	71
3.1	Das Modell eines idealen Gases, die Maxwell–Boltzmann–Verteilung	72
3.2	Thermodynamische Systeme, das thermodynamische Gleichgewicht	76
3.3	Der erste Hauptsatz der Thermodynamik	77

3.4	Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik, die Entropie.....	81
3.5	Thermodynamische Potentiale .....	92
3.6	Die Legendre–Transformation .....	94
3.7	Der Kalkül der Differentialformen .....	95
3.8	Thermodynamik bei Mischungen, das chemische Potential .....	98
3.9	Chemische Reaktionen in Mehrspeziessystemen .....	105
3.10	Gleichgewichtspunkte chemischer Reaktionen .....	110
3.11	Kinetische Reaktionen .....	115
3.12	Literaturhinweise .....	118
3.13	Aufgaben .....	118
<b>4</b>	<b>Gewöhnliche Differentialgleichungen .....</b>	<b>127</b>
4.1	Eindimensionale Schwingungen .....	127
4.2	Lagrangesche und Hamiltonsche Formulierung der Mechanik ..	136
4.3	Beispiele aus der Populationsdynamik .....	147
4.4	Qualitative Analysis, Phasenportraits .....	149
4.5	Prinzip der linearisierten Stabilität .....	154
4.6	Stabilität linearer Systeme .....	157
4.7	Variationsprobleme für Funktionen einer Variablen .....	161
4.8	Optimale Steuerung gewöhnlicher Differentialgleichungen .....	177
4.9	Literaturhinweise .....	183
4.10	Aufgaben .....	184
<b>5</b>	<b>Kontinuumsmechanik .....</b>	<b>191</b>
5.1	Einleitung .....	191
5.2	Teilchenmechanik .....	194
5.3	Von der Teilchenmechanik zum kontinuierlichen Medium .....	198
5.4	Kinematik .....	201
5.5	Erhaltungssätze .....	207
5.6	Konstitutive Gesetze .....	217
5.7	Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik in der Kontinuumsmechanik .....	229
5.8	Beobachterunabhängigkeit .....	238
5.9	Konstitutive Theorie für viskose Flüssigkeiten .....	244

5.10	Modellierung elastischer Feststoffe . . . . .	248
5.11	Elektromagnetismus . . . . .	265
5.12	Dispersion . . . . .	284
5.13	Literaturhinweise . . . . .	285
5.14	Aufgaben . . . . .	285
<b>6</b>	<b>Partielle Differentialgleichungen . . . . .</b>	<b>301</b>
6.1	Elliptische Gleichungen . . . . .	301
6.1.1	Variationsrechnung . . . . .	302
6.1.2	Die Fundamentallösung . . . . .	312
6.1.3	Mittelwertsatz und Maximumprinzip . . . . .	315
6.1.4	Ebene Potentialströmungen, die Methode der komplexen Variablen . . . . .	317
6.1.5	Die Stokes–Gleichungen . . . . .	322
6.1.6	Homogenisierung . . . . .	325
6.1.7	Optimale Steuerung elliptischer Differentialgleichungen .	329
6.1.8	Parameteridentifizierung und inverse Probleme . . . . .	333
6.1.9	Lineare Elastizitätstheorie . . . . .	337
6.2	Parabolische Gleichungen . . . . .	340
6.2.1	Eindeutigkeit von Lösungen, die Energiemethode . . . . .	342
6.2.2	Verhalten für große Zeiten . . . . .	344
6.2.3	Separation der Variablen und Eigenfunktionen . . . . .	348
6.2.4	Das Maximumprinzip . . . . .	350
6.2.5	Die Fundamentallösung . . . . .	352
6.2.6	Diffusionszeiten . . . . .	355
6.2.7	Invariante Transformationen . . . . .	356
6.2.8	Allgemeine Anfangswerte . . . . .	357
6.2.9	Brownsche Bewegung . . . . .	358
6.2.10	Laufende Wellen - „Travelling Waves“ . . . . .	361
6.2.11	Reaktions–Diffusions–Gleichung und Laufende Wellen .	363
6.2.12	Turing–Instabilität und Musterbildung . . . . .	369
6.2.13	Cahn–Hilliard–Gleichung und Musterbildung . . . . .	377
6.3	Hyperbolische Erhaltungsgleichungen . . . . .	380
6.4	Die Wellengleichung . . . . .	389

## XIV Inhaltsverzeichnis

6.5	Die Navier–Stokes–Gleichungen . . . . .	396
6.6	Grenzschichten . . . . .	401
6.7	Literaturhinweise . . . . .	416
6.8	Aufgaben . . . . .	416
<b>7</b>	<b>Probleme mit freiem Rand . . . . .</b>	<b>423</b>
7.1	Hindernisprobleme und Kontaktprobleme . . . . .	424
7.2	Freie Ränder in porösen Medien . . . . .	431
7.3	Das Stefan–Problem . . . . .	442
7.4	Entropieungleichung für das Stefan–Problem . . . . .	449
7.5	Unterkühlte Flüssigkeiten . . . . .	451
7.6	Gibbs–Thomson–Effekt . . . . .	452
7.7	Mullins–Sekerka–Instabilität . . . . .	454
7.8	A priori Abschätzungen für das Stefan–Problem . . . . .	457
7.9	Die Phasenfeldgleichungen . . . . .	460
7.10	Freie Oberflächen in der Strömungsmechanik . . . . .	467
7.11	Dünne Filme und Lubrikationsapproximation . . . . .	470
7.12	Literaturhinweise . . . . .	474
7.13	Aufgaben . . . . .	474
<b>A</b>	<b>Funktionenräume . . . . .</b>	<b>483</b>
<b>B</b>	<b>Krümmung von Hyperflächen . . . . .</b>	<b>487</b>
<b>Literaturverzeichnis . . . . .</b>		<b>493</b>
<b>Sachverzeichnis . . . . .</b>		<b>499</b>