

Inhalt

1 GRUNDLAGEN	1
1.1 Zahlen	1
1.1.1 Natürliche Zahlen	1
1.1.2 Ganze Zahlen	2
1.1.3 Rationale Zahlen	3
1.1.4 Reelle Zahlen	4
1.2 Rechnen mit reellen Zahlen	8
1.2.1 Grundgesetze der Addition	8
1.2.2 Grundgesetze der Multiplikation	9
1.2.3 Binomische Formeln	10
1.2.4 Vorzeichenregeln	12
1.2.5 Regeln für Brüche	13
1.2.6 Potenzen	14
1.2.7 Wurzeln	16
1.2.8 Summenzeichen	18
1.3 Mengen	21
1.3.1 Definition	21
1.3.2 Mengensymbolik	22
1.3.3 Mengenoperationen	25
1.3.4 Rechnen mit Mengen	29
1.4 Funktionen	33
1.4.1 Definition von Relation und Funktion	33
1.4.2 Inverse Funktionen	42
1.4.3 Zusammengesetzte Funktionen	48
1.5 Ungleichungen, Absolutbetrag	53
1.5.1 Ungleichungen	53
1.5.2 Absolutbetrag	61
1.5.3 Intervalle	65
1.6 Folgen und Reihen	68
1.6.1 Definitionen der Folge und Reihe	68
1.6.2 Arithmetische Folgen und Reihen	73
1.6.3 Geometrische Folgen und Reihen	82
1.6.4 Konvergenz	98

2 FUNKTIONEN, GRENZWERTE, STETIGKEIT	105
2.1 Arten von Funktionen	105
2.1.1 Ganze rationale Funktionen	106
2.1.2 Gebrochen rationale Funktionen	111
2.1.3 Wurzelfunktionen	115
2.1.4 Exponentialfunktionen	117
2.1.5 Logarithmische Funktionen	118
2.1.6 Anwendungen	121
2.2 Grenzwerte von Funktionen	128
2.2.1 Definition des Grenzwerts	128
2.2.2 Sonderfälle von Grenzwerten	135
2.2.3 Verknüpfung und Berechnung von Grenzwerten	139
2.3 Stetigkeit	142
2.3.1 Definition der Stetigkeit	142
2.3.2 Arten der Unstetigkeit	143
2.3.3 Eigenschaften stetiger Funktionen	152
3 DIFFERENTIATION	155
3.1 Steigung und Ableitung einer Funktion	155
3.1.1 Lineare Funktionen	155
3.1.2 Nichtlineare Funktionen	157
3.1.3 Definition der Ableitung	158
3.2 Ableitungen einfacher Funktionen	161
3.2.1 Konstante Funktion	161
3.2.2 Identische Funktion	162
3.2.3 Potenzfunktion	162
3.3 Ableitungen für Summe, Produkt und Quotient	164
3.3.1 Produkt einer Konstanten und einer Funktion (Faktorregel)	164
3.3.2 Summe und Differenz (Summenregel)	165
3.3.3 Produkt zweier Funktionen (Produktregel)	165
3.3.4 Quotient einer Funktion (einfache Quotientenregel)	167
3.3.5 Quotient zweier Funktionen (Quotientenregel)	168
3.3.6 Zusammengesetzte Funktionen (Kettenregel)	169
3.4 Ableitung der Logarithmus- und Exponentialfunktion	171
3.4.1 Die Eulersche Zahl e	171
3.4.2 Ableitung des natürlichen Logarithmus	174
3.4.3 Ableitung des natürlichen Logarithmus einer Funktion	175
3.4.4 Ableitung des allgemeinen Logarithmus	175
3.4.5 Ableitung der e-Funktion	177
3.4.6 Ableitung der allgemeinen e-Funktion	178

3.4.7 Ableitung der allgemeinen Exponentialfunktion	178
3.4.8 Logarithmische Differentiation und Transformation	179
3.5 Instrumente der Differentialrechnung	183
3.5.1 Differential	183
3.5.2 Newton-Verfahren	186
3.5.3 L'Hospitalsche Regel	190
3.5.4 Stetigkeit und Differenzierbarkeit	191
3.6 Eigenschaften von Funktionen	194
3.6.1 Steigende und fallende Funktionen, Monotonie	194
3.6.2 Relative Maxima und Minima	197
3.6.3 Konvexe und konkave Funktionen	211
3.7 Ökonomische Anwendungen	216
3.7.1 Durchschnittskostenminimum	216
3.7.2 Gewinnmaximum des Polypolisten	221
3.7.3 Erlösfunktion, Grenzerlös, Durchschnittserlös	225
3.7.4 Elastizitäten	226
3.7.5 Gewinnmaximum des Monopolisten	232
3.7.6 Lagerhaltungsmodelle, optimale Bestellmenge	235
4 DIFFERENTIATION: FUNKTIONEN MEHRERER VARIABLEN	243
4.1 Funktionen zweier Variablen	243
4.2 Partielle Differentiation	252
4.2.1 Partielle Ableitungen 1. Ordnung	252
4.2.2 Geometrische Bedeutung der partiellen Ableitung	253
4.2.3 Partielle Ableitungen 2. Ordnung	254
4.3 Anwendungen der partiellen Differentiation	258
4.3.1 Totales Differential	258
4.3.2 Totale Ableitung	262
4.3.3 Implizite Differentiation	264
4.3.4 Partielle Elastizitäten	266
4.4 Maxima und Minima	269
4.4.1 Definition	269
4.4.2 Hinreichende Bedingungen	272
4.4.3 Anwendungen	276
4.5 Maxima und Minima unter Nebenbedingungen	280
4.5.1 Problemstellung	280
4.5.2 Lagrange Multiplikatoren Methode	281
4.5.3 Geometrische Interpretation der hinreichenden Bedingungen	287
4.5.4 Bedeutung des Lagrange-Multiplikators	288

4.5.5 Anwendungen	294
5 INTEGRATION	305
5.1 Das bestimmte Integral	307
5.1.1 Problemstellung	307
5.1.2 Beispiele	308
5.1.3 Definition des bestimmten Integrals	313
5.1.4 Eigenschaften bestimmter Integrale	316
5.2 Das unbestimmte Integral	319
5.2.1 Integralfunktion	319
5.2.2 Stammfunktion	321
5.2.3 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	325
5.2.4 Spezielle Stammfunktionen (Grundintegrale)	327
5.3 Integrationstechniken	330
5.3.1 Integration durch Substitution	330
5.3.2 Partielle Integration	335
5.3.3 Integration durch Partialbruchzerlegung	340
5.4 Uneigentliche Integrale	348
5.4.1 Problemstellung	348
5.4.2 Integrale mit unbeschränkten Integrationsintervallen	348
5.4.3 Integrale mit unbeschränkten Integranden	351
5.4.4 Vergleichstest für die Konvergenz	353
5.5 Flächenberechnungen (Quadraturen)	356
5.5.1 Fläche unter einer Kurve	356
5.5.2 Negative Flächen	359
5.5.3 Fläche zwischen zwei Kurven	365
5.5.4 Doppelintegrale	367
5.6 Ökonomische Anwendungen	374
5.6.1 Konsumentenrente	374
5.6.2 Produzentenrente	377
5.6.3 Ressourcialökonomie: Verbrauchsfunktion	382
5.6.4 Kostenfunktion, Grenzkostenfunktion	386
5.6.5 Grenzsteuersatz und Steuerbetrag	388
5.6.6 Ertragswert einer Investition	391
6 DIFFERENZENGLEICHUNGEN	395
6.1 Grundlagen	395
6.1.1 Differenzen- und Differentialgleichungen	395
6.1.2 Klassifikation von Differenzengleichungen	398

6.2 Homogene Differenzengleichungen 1. Ordnung	400
6.2.1 Lösung	400
6.2.2 Verhalten der Lösung im Zeitablauf (Dynamik)	401
6.2.3 Beispiele	406
6.2.4 Anwendungen	410
6.3 Inhomogene Differenzengleichungen 1. Ordnung	418
6.3.1 Lösung	418
6.3.2 Dynamische Eigenschaften der Lösungen	423
6.3.3 Beispiele	429
6.3.4 Anwendungen	433
6.4 Homogene Differenzengleichungen 2. Ordnung	444
6.4.1 Lösungsansatz	444
6.4.2 Fall $\Delta > 0$: Reelle und ungleiche Wurzeln	445
6.4.3 Kaninchenproblem und Fibonacci-Folge	451
6.4.4 Fall $\Delta = 0$: Reelle und gleiche Wurzeln	459
6.4.5 Exkurs: Komplexe Zahlen	462
6.4.6 Fall $\Delta < 0$: Komplexe Wurzeln	469
6.4.7 Stabilitätsbedingungen (Koeffizientenkriterien)	480
6.5 Inhomogene Differenzengleichungen 2. Ordnung	483
6.5.1 Partikuläre Lösung	483
6.5.2 Allgemeine Lösung	485
6.5.3 Beispiele	489
6.5.4 Anwendungen	494
7 DIFFERENTIALGLEICHUNGEN	511
7.1 Definition und Klassifikation	511
7.2 Homogene Differentialgleichungen 1. Ordnung	513
7.2.1 Lösung	513
7.2.2 Dynamisches Verhalten der Lösung	515
7.2.3 Homogene Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten	517
7.3 Inhomogene Differentialgleichungen 1. Ordnung	519
7.3.1 Partikuläre Lösung	519
7.3.2 Allgemeine Lösung	521
7.3.3 Inhomogene Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten	524
7.3.4 Anwendungen	525
7.4 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung	531
7.4.1 Lösung der homogenen Differentialgleichung 2. Ordnung	531
7.4.2 Partikuläre Lösung der inhomogenen DG 2. Ordnung	540
7.4.3 Allgemeine Lösung der inhomogenen DG 2. Ordnung	541

8 LINEARE ALGEBRA (MATRIXALGEBRA)	547
8.1 Definitionen und Unterscheidungen	548
8.1.1 Beispiele	548
8.1.2 Matrix und Vektor	550
8.1.3 Spezielle Matrizen	553
8.2 Matrixoperationen	556
8.2.1 Addition und Subtraktion von Matrizen	556
8.2.2 Multiplikation mit einem Skalar	558
8.2.3 Transponieren	559
8.2.4 Matrizenmultiplikation	561
8.3 Determinanten	573
8.3.1 Definition der Determinante	573
8.3.2 Eigenschaften von Determinanten (Rechenregeln)	579
8.4 Inverse Matrizen	587
8.4.1 Definition der Inversen	587
8.4.2 Berechnung der Inversen aus Determinante und Adjunkte	589
8.4.3 Eigenschaften der Inversen	598
8.4.4 Berechnung der Inversen mit Elementaroperationen	600
8.5 Vektorräume, lineare Unabhängigkeit und Rang	608
8.5.1 Vektorräume und lineare Unabhängigkeit	608
8.5.2 Rang einer Matrix	615
8.6 Lineare Gleichungssysteme	622
8.6.1 Begriff und Problemstellung	622
8.6.2 Existenz einer Lösung	624
8.6.3 Inhomogene lineare Gleichungssysteme: Fall $m = n$	627
8.6.4 Inhomogene lineare Gleichungssysteme: Fall $m > n$	637
8.6.5 Inhomogene lineare Gleichungssysteme: Fall $m < n$	641
8.6.6 Homogene lineare Gleichungssysteme	648
8.7 Extremalbedingungen für Funktionen	655
8.7.1 Gradient, Hesse-Matrix	655
8.7.2 Hinreichende Bedingungen für unbeschränkte Extrema	658
8.7.3 Hinreichende Bedingungen für beschränkte Extrema	662
LÖSUNGEN	669
LITERATUR	683
INDEX	687