

Inhaltsverzeichnis

1	Modellierung oder wie man auf eine Differenzialgleichung kommt	1
1.1	Mathematische Modellierung	2
1.2	Transportprozesse	4
1.3	Diffusion	8
1.4	Die Wellengleichung	9
1.5	Die Black-Scholes-Gleichung	11
1.6	Jetzt wird es mehrdimensional	17
1.7*	Es gibt noch mehr	22
1.8	Klassifikation partieller Differenzialgleichungen	28
1.9*	Kommentare zu Kapitel 1	29
1.10	Aufgaben	30
2	Kategorisierung und Charakteristiken	33
2.1	Charakteristiken von Anfangswertproblemen auf \mathbb{R}	34
2.2	Gleichungen zweiter Ordnung	43
2.3*	Nichtlineare Gleichungen zweiter Ordnung	47
2.4*	Gleichungen höherer Ordnung und Systeme	48
2.5	Aufgaben	49
3	Elementare Lösungsmethoden	53
3.1	Die eindimensionale Wellengleichung	54
3.2	Fourier-Reihen	58
3.3	Die Laplace-Gleichung	65
3.4	Die Wärmeleitungsgleichung	75
3.5	Die Black-Scholes-Gleichung	89
3.6	Integraltransformationen	95
3.7	Ausblick	106
3.8	Aufgaben	108
4	Hilbert-Räume	111
4.1	Unitäre Räume	112
4.2	Orthonormalbasen	115
4.3	Vollständigkeit	119
4.4	Orthogonale Projektionen	120
4.5	Linearformen und Bilinearformen	122
4.6	Schwache Konvergenz	126
4.7	Stetige und kompakte Operatoren	129
4.8	Der Spektralsatz	130

4.9*	Kommentare zu Kapitel 4	138
4.10	Aufgaben	140
5	Sobolev-Räume und Randwertaufgaben in einer Dimension	143
5.1	Sobolev-Räume in einer Variablen	144
5.2	Randwertprobleme auf einem Intervall	152
5.3*	Kommentare zu Kapitel 5	161
5.4	Aufgaben	161
6	Hilbert-Raum-Methoden für elliptische Gleichungen	165
6.1	Regularisierung	166
6.2	Sobolev-Räume über $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$	172
6.3	Der Raum $H_0^1(\Omega)$	179
6.4	Die Verbandsoperationen auf $H^1(\Omega)$	182
6.5	Die Poisson-Gleichung mit Dirichlet-Randbedingungen	185
6.6	Sobolev-Räume und Fourier-Transformation	188
6.7	Lokale Regularität	193
6.8	Inhomogene Dirichlet-Randbedingungen	198
6.9	Das Dirichlet-Problem	201
6.10	Elliptische Gleichungen mit Dirichlet-Randbedingungen	209
6.11	H^2 -Regularität	211
6.12*	Kommentare zu Kapitel 6	214
6.13	Aufgaben	215
7	Neumann- und Robin-Randbedingungen	219
7.1	Der Satz von Gauß	220
7.2	Beweis des Satzes von Gauß	225
7.3	Die Fortsetzungseigenschaft	230
7.4	Die Poisson-Gleichung mit Neumann-Randbedingungen	235
7.5	Der Spursatz und Robin-Randbedingungen	238
7.6*	Kommentare zu Kapitel 7	241
7.7	Aufgaben	242
8	Spektralzerlegung und Evolutionsgleichungen	245
8.1	Ein vektorwertiges Anfangswertproblem	246
8.2	Die Wärmeleitungsgleichung: Dirichlet-Randbedingungen	249
8.3	Die Wärmeleitungsgleichung: Robin-Randbedingungen	255
8.4	Die Wellengleichung	257
8.5	Inhomogene Evolutionsgleichungen	262
8.6*	Kommentare zu Kapitel 8	268
8.7	Aufgaben	268
9	Numerische Verfahren	271
9.1	Finite Differenzen	273
9.2	Finite Elemente	287
9.3*	Ergänzungen und Erweiterungen	309
9.4	Parabolische Probleme	311

9.5*	Kommentare zu Kapitel 9	322
9.6	Aufgaben	323
10	Maple® oder manchmal hilft der Computer	327
10.1	Maple®	328
10.2	Aufgaben	333
Anhang		337
A.1	Banach-Räume und lineare Operatoren	337
A.2	Der Raum $C(K)$	339
A.3	Integration	339