
Indice

1	Spazi a dimensione finita	1
1.1	Primi esempi di strutture vettoriali	1
1.2	Spazi vettoriali (a dimensione finita)	3
1.3	Matrici come trasformazioni lineari	5
1.4	Cambiamenti di base e matrici unitarie	7
1.5	Autovalori e autovettori di una matrice	8
1.6	Diagonalizzazione di una matrice hermitiana	10
1.7	Problemi agli autovalori: esempi. Evoluzione temporale di sistemi dinamici lineari	13
1.8	Proiettori e decomposizione spettrale di una matrice	19
1.9	Considerazioni geometriche elementari sulle trasformazioni del piano reale	20
1.10	Gruppi di simmetrie e gruppi di matrici	22
1.11	Strutture vettoriali e principio di sovrapposizione	24
2	Spazi di Hilbert	27
2.1	Equazione di d'Alembert. Onde stazionarie	28
2.2	Primi problemi concernenti gli spazi a dimensione infinita	31
2.3	La serie di Fourier trigonometrica: le sue prime proprietà e difficoltà	32
2.4	Evoluzione temporale di un'onda elastica	36
2.5	L'equazione del calore	38
2.6	Prodotto scalare e norma: definizione generale	39
2.7	Il concetto di norma come "distanza"	41
2.8	Alcune osservazioni sulla integrazione delle funzioni	44
2.9	Lo spazio $L^2(I)$	46
2.10	Lo spazio di Hilbert: definizione generale. Teorema di Fourier in L^2	48
2.11	Sistemi indipendenti e ortonormali	49
2.12	Serie di Fourier "astratta"	50
2.13	Proprietà dei sistemi completi	52
2.14	Spazi separabili e lo spazio ℓ^2	55
2.15	Proprietà ed applicazioni delle serie di Fourier	59

2.16	Trasformazioni lineari	62
2.17	Continuità, limitatezza e norma di un operatore. Estensione per continuità	63
2.18	Una applicazione concernente il problema della corda elastica.	67
2.19	Operatore aggiunto. Operatori unitari. Proiettori	68
2.20	Autovalori ed autovettori. Spettro di un operatore	73
2.21	Problema di Sturm-Liouville	77
2.22	L'equazione di d'Alembert in due dimensioni	79
2.23	Equazione di Sturm-Liouville con punti singolari. Alcune funzioni speciali	81
2.24	Equazione di Laplace e funzioni armoniche. Problemi di Dirichlet e di Neumann	84
2.25	Equazioni alle derivate parziali. Il metodo di d'Alembert	87
2.26	Funzionali. Teorema di Riesz	89
2.27	Operatore aggiunto	90
2.28	Operatori chiusi	91
2.29	Varie nozioni di convergenza per successioni di vettori e operatori	94
2.30	Operatori compatti	96
3	Funzioni di una variabile complessa	97
3.1	Prime definizioni. Condizioni di olomorfia	97
3.2	Serie di potenze	100
3.3	Integrazione delle funzioni di variabile complessa	102
3.4	Teoremi di Cauchy. Esistenza di tutte le derivate	103
3.5	Sviluppi in serie di Taylor-Laurent	105
3.6	Proprietà degli zeri delle funzioni olomorfe	107
3.7	Singolarità removibili	110
3.8	Punti singolari isolati	111
3.9	Calcolo dei residui. Prime applicazioni al calcolo di integrali definiti	112
3.10	Punto all'infinito	117
3.11	Residuo all'infinito	119
3.12	Punti di diramazione. Tagli. Integrazione lungo tagli	120
3.13	Il lemma di Jordan	126
3.14	Funzioni armoniche e trasformazioni conformi. Il potenziale complesso	130
4	Trasformate di Fourier e Laplace	137
4.1	Le serie di Fourier come "analisi in frequenza". Dalla serie all'integrale di Fourier	138
4.2	L'analisi in frequenza e il "principio di indeterminazione"	139
4.3	La trasformata di Fourier in $L^1(\mathbf{R})$	144
4.4	Continuità della trasformata di Fourier	145
4.5	Derivazione e trasformata di Fourier	147
4.6	Trasformata di Fourier in $L^2(\mathbf{R})$	149
4.7	Inversione della trasformata di Fourier	152

4.8	Proprietà della trasformata di Fourier. La trasformata come operatore unitario	154
4.9	L’“impedenza” dei circuiti elettrici e la trasformata di Fourier	157
4.10	Proprietà della funzione di Green	159
4.11	Prime proprietà della delta di Dirac	161
4.12	Relazioni di dispersione: introduzione	164
4.13	Teorema di Titchmarsh. Trasformate di Hilbert	166
4.14	Relazioni di dispersione di Kramers e Kronig	168
4.15	Presenza di singolarità nella $\chi(\omega)$. Mezzi conduttori	170
4.16	Modello dell’elettrone legato elasticamente	171
4.17	Trasformata di Laplace: prime proprietà	172
4.18	Olomorfia della trasformata di Laplace	175
4.19	Inversione della trasformata di Laplace	177
4.20	Alcune osservazioni sulla trasformata di Laplace	178
4.21	La funzione Γ di Eulero ed altre trasformate di Laplace	181
4.22	Applicazioni alle equazioni alle derivate parziali	182
5	Elementi di teoria delle distribuzioni	187
5.1	Distribuzioni temperate	187
5.2	Convergenza “debole” fra distribuzioni	189
5.3	Derivata delle distribuzioni	191
5.4	Trasformata di Fourier delle distribuzioni temperate	192
5.5	Distribuzione “parte principale” $\mathcal{P}(1/x)$	195
5.6	Distribuzioni di Schwartz e distribuzioni a supporto compatto	198
5.7	Proprietà e applicazioni delle distribuzioni	200
5.8	Prodotto e convoluzione fra distribuzioni	204
5.9	Funzioni di Green. Il potenziale coulombiano	207
5.10	Funzioni di Green con condizioni al contorno	208
5.11	Funzione di Green per il potenziale nel semipiano	211
6	Introduzione alla teoria dei gruppi e alle proprietà di simmetria	213
6.1	Alcune definizioni generali	213
6.2	Omomorfismi tra gruppi. Gruppi quoziante	215
6.3	Rappresentazioni di un gruppo	218
6.4	Rappresentazioni dei gruppi finiti. Caratteri	220
6.5	Lemma di Schur. Le simmetrie nella fisica	223
6.6	Livelli vibrazionali di sistemi con simmetria	225
6.7	Gruppi di Lie. Definizioni ed esempi generali	227
6.8	Algebre di Lie	229
6.9	Gruppi e algebre di Lie e loro rappresentazioni	233
6.10	Rappresentazioni differenziali. Gruppi delle traslazioni e delle rotazioni	234
6.11	Gruppo delle rotazioni ed SU_2	238
6.12	Alcune proprietà generali delle algebre	241
6.13	Rappresentazioni tensoriali e loro decomposizione. Il gruppo SU_3	242

x	Indice	
6.14	Il potenziale centrale e l'atomo di idrogeno	245
6.15	L'oscillatore armonico isotropo	247
6.16	Il gruppo di Lorentz	248
6.17	Un cenno ad altri sviluppi	251
	Riferimenti bibliografici	253
	Indice analitico	255