

Christian Großmann, Hans Görg Roos

Numerische Behandlung partieller Differentialgleichungen

3., völlig überarbeitete und erweiterte Auflage



Teubner

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	5
Notation	11
1 Grundbegriffe	13
1.1 Klassifikation und Korrektheit	13
1.2 Fouriersche Methode, Integraltransformationen	17
1.3 Maximumprinzip, Fundamentallösung	20
1.3.1 Elliptische Randwertaufgaben	20
1.3.2 Parabolische Aufgaben und Anfangs-Randwertaufgaben	26
1.3.3 Hyperbolische Anfangs- und Anfangs-Randwertaufgaben	29
2 Differenzenverfahren	33
2.1 Grundkonzepte	33
2.2 Einführende Beispiele	40
2.3 Transportprobleme und Erhaltungsgleichungen	45
2.3.1 Der eindimensionale lineare Fall	46
2.3.2 Eigenschaften nichtlinearer Erhaltungsgleichungen	56
2.3.3 Differenzenverfahren für nichtlineare Erhaltungsgleichungen	61
2.4 Elliptische Randwertaufgaben	69
2.4.1 Elliptische Randwertaufgaben	69
2.4.2 Der klassische Zugang zu Differenzenverfahren	70
2.4.3 Diskrete Greensche Funktionen	80
2.4.4 Differenzensterne und Diskretisierung in allgemeineren Gebieten	82
2.4.5 Gemischte Ableitungen, Operatoren vierter Ordnung und Randbedingungen 2. und 3. Art	88
2.4.6 Lokale Gitteranpassung	93
2.5 Differenzenverfahren und Finite-Volumen-Verfahren	95
2.6 Parabolische Anfangs-Randwert-Probleme	107
2.6.1 Räumlich eindimensionale Aufgaben	107
2.6.2 Räumlich mehrdimensionale Aufgaben	112
2.6.3 Semidiskretisierungen	116
2.7 Hyperbolische Probleme 2. Ordnung	120

3 Schwache Lösungen	127
3.1 Einführung	127
3.2 Angepaßte Funktionenräume	130
3.3 Variationsgleichungen und konforme Approximation	144
3.4 Abschwächungen der V -Elliptizität	165
3.5 Nichtlineare Probleme	169
4 Methode der finiten Elemente	175
4.1 Ein Beispiel	175
4.2 Finite-Elemente-Räume	180
4.2.1 Lokale Elemente und globale Eigenschaften	180
4.2.2 Einige wichtige Finite-Elemente-Ansätze im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3	190
4.3 Zur Realisierung der Finite-Elemente-Methode	203
4.3.1 Struktur der Teilaufgaben	203
4.3.2 Beschreibung der Ausgangsaufgabe	205
4.3.3 Erzeugung der endlichdimensionalen Probleme	207
4.3.4 Gittergenerierung und Gitterveränderung	212
4.4 Konvergenz konformer Methoden	218
4.4.1 Basisaussagen zur Interpolation in Sobolev-Räumen	218
4.4.2 Hilbert-Raum-Fehlerabschätzungen	228
4.4.3 Inverse Ungleichungen und punktweise Fehlerabschätzungen	234
4.5 Nichtkonforme Finite-Elemente-Methoden	239
4.5.1 Einführung	239
4.5.2 Ansatzräume mit geringerer Glattheit	241
4.5.3 Näherungsweise Integration	245
4.5.4 Die Finite-Volumen-Methode, analysiert aus FEM-Sicht	251
4.5.5 Approximation krummliniger Ränder	254
4.6 Gemischte finite Elemente	257
4.6.1 Gemischte Variationsgleichungen und Sattelpunkte	257
4.6.2 Konforme Approximation gemischter Variationsgleichungen	264
4.6.3 Abschwächungen von Glattheitsforderungen bei der Poisson- und der biharmonischen Gleichung	271
4.6.4 Penalty-Methoden und modifizierte Lagrange-Funktionen	276
4.7 Fehlerschätzer und adaptive FEM	286
4.7.1 Ein residualer Fehlerschätzer	287
4.7.2 Mittelung und zielorientierte Schätzer	290
4.8 Die diskontinuierliche Galerkin-Methode	292
4.8.1 Die primale Formulierung für ein Reaktions-Diffusions-Problem	293
4.8.2 Ein hyperbolisches Problem erster Ordnung	297
4.8.3 Konvergenzanalyse für ein Konvektions-Diffusion-Problem	299
4.9 Hinweise zu weiteren Aspekten	303
4.9.1 Zur Kondition der Steifigkeitsmatrix im symmetrischen Fall	303
4.9.2 Eigenwertprobleme	305
4.9.3 Superkonvergenz	307

4.9.4 p- und hp-Version	311
5 Finite Elemente für instationäre Probleme	313
5.1 Parabolische Aufgaben	313
5.1.1 Zur schwachen Formulierung	313
5.1.2 Semidiskretisierung mit finiten Elementen	317
5.1.3 Zeitdiskretisierung mit Standardverfahren	325
5.1.4 Zeitdiskretisierung mit der diskontinuierlichen Galerkin-Methode	332
5.1.5 Die Rothe-Methode	337
5.1.6 Fehlerkontrolle	342
5.2 Hyperbolische Aufgaben zweiter Ordnung	350
5.2.1 Zur schwachen Formulierung	350
5.2.2 Semiskretisierung mit finiten Elementen	353
5.2.3 Zeitdiskretisierung	357
5.2.4 Die Rothe-Methode bei hyperbolischen Problemen	362
5.2.5 Bemerkungen zur Fehlerkontrolle	365
6 Singulär gestörte Randwertaufgaben	367
6.1 Zweipunkt-Randwertaufgaben	367
6.1.1 Zum analytischen Verhalten der Lösungen	367
6.1.2 Diskretisierung auf Standardgittern	374
6.1.3 Grenzschichtangepaßte Gitter	385
6.2 Räumlich eindimensionale parabolische Probleme	390
6.2.1 Zum analytischen Verhalten der Lösung	390
6.2.2 Diskretisierungsverfahren	392
6.3 Mehrdimensionale Konvektions-Diffusions-Probleme	396
6.3.1 Zur Analysis elliptischer Konvektions-Diffusions-Probleme	396
6.3.2 Diskretisierung auf Standardgittern	402
6.3.3 Grenzschichtangepaßte Gitter	416
6.3.4 Zu parabolischen Problemen, mehrdimensional im Raum	418
7 Variationsungleichungen, optimale Steuerung	423
7.1 Aufgabenstellung	423
7.2 Diskretisierung von Variationsungleichungen	434
7.3 Penalty-Methoden	444
7.3.1 Grundkonzept von Penalty-Methoden	444
7.3.2 Abstimmung von Straf- und Diskretisierungsparametern	460
7.4 Optimale Steuerung partieller DGLN	467
7.4.1 Zur Analysis eines elliptischen Modellproblems	467
7.4.2 Diskretisierung mittels Finite-Elemente-Methoden	476
8 Verfahren für diskretisierte Probleme	485
8.1 Besonderheiten der Aufgabenstellung	485
8.2 Direkte Verfahren	488
8.2.1 Das Gauß-Verfahren für Bandmatrizen	488

8.2.2 Schnelle Lösung diskreter Poisson-Gleichungen, FFT	490
8.3 Iterationsverfahren	496
8.3.1 Basisstruktur und Konvergenz	496
8.3.2 Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahren	499
8.3.3 Block-Iterations-Verfahren	505
8.3.4 Relaxations- und Splittingverfahren	509
8.4 CG - Verfahren	515
8.4.1 Grundkonzept, Konvergenzeigenschaften	515
8.4.2 Vorkonditionierte CG-Verfahren	523
8.5 Mehrgitterverfahren	533
8.6 Gebietszerlegung, parallele Algorithmen	544
Literaturverzeichnis	553
Bücher u. ä.	553
Zeitschriftenartikel	559
Index	566