

Inhaltsverzeichnis

1. Elementare Newton'sche Mechanik

1.1	Die Newton'schen Gesetze (1687) und ihre Interpretation	1
1.2	Gleichförmig geradlinige Bewegung und Inertialsysteme.....	5
1.3	Inertialsysteme in relativer Bewegung	6
1.4	Impuls und Kraft.....	7
1.5	Typische Kräfte; Bemerkung über Maßeinheiten.....	9
1.6	Raum, Zeit und Kräfte.....	11
1.7	Das Zwei-Teilchen-System mit inneren Kräften	12
1.7.1	Schwerpunkts- und Relativbewegung.....	12
1.7.2	Gravitationskraft zwischen zwei Himmelskörpern (Kepler-Problem)	13
1.7.3	Schwerpunkts- und Relativimpuls im Zwei-Teilchen-System.....	17
1.8	Systeme von endlich vielen Teilchen	18
1.9	Der Schwerpunktsatz.....	19
1.10	Der Drehimpulssatz.....	20
1.11	Der Energiesatz.....	20
1.12	Das abgeschlossene n -Teilchen-System	21
1.13	Galilei-Transformationen	22
1.14	Raum und Zeit der Mechanik bei Galilei-Invarianz	26
1.15	Konservative Kraftfelder	28
1.16	Eindimensionale Bewegung eines Massenpunktes.....	30
1.17	Bewegungsgleichungen in einer Dimension	31
1.17.1	Harmonischer Oszillator	31
1.17.2	Das ebene mathematische Pendel im Schwerfeld	33
1.18	Phasenraum für das n -Teilchen-System (im \mathbb{R}^3).....	34
1.19	Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der Bewegungsgleichungen	35
1.20	Physikalische Konsequenzen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes	36
1.21	Lineare Systeme	39
1.22	Zur Integration eindimensionaler Bewegungsgleichungen.....	40
1.23	Das ebene Pendel bei beliebigem Ausschlag	42
1.24	Das Zwei-Teilchen-System mit Zentralkraft	44
1.25	Rotierendes Koordinatensystem: Coriolis- und Zentrifugalkräfte	48
1.26	Coriolis-Beschleunigung auf der Erde	49
1.27	Streuung zweier Teilchen, die über eine Zentralkraft miteinander wechselwirken: Kinematik.....	57
1.28	Zwei-Teilchenstreuung mit Zentralkraft: Dynamik.....	60
1.29	Coulomb-Streuung zweier Teilchen mit gleichen Massen und Ladungen	63
1.30	Ausgedehnte mechanische Körper.....	65
1.31	Virial und zeitliche Mittelwerte	69
	Anhang: Praktische Übungen	71

2. Die Prinzipien der kanonischen Mechanik

2.1	Zwangsbedingungen und verallgemeinerte Koordinaten.....	79
2.1.1	Definition von Zwangsbedingungen.....	79
2.1.2	Generalisierte Koordinaten.....	81
2.2	Das d'Alembert'sche Prinzip.....	81
2.2.1	Definition der virtuellen Verrückungen.....	81
2.2.2	Statischer Fall.....	82
2.2.3	Dynamischer Fall.....	82
2.3	Die Lagrange'schen Gleichungen.....	84
2.4	Einfache Anwendungen des d'Alembert'schen Prinzips.....	85
2.5	Exkurs über Variationsprinzipien.....	87
2.6	Hamilton'sches Extremalprinzip.....	89
2.7	Die Euler-Lagrange-Gleichungen.....	90
2.8	Einige Anwendungen des Hamilton'schen Prinzips.....	91
2.9	Lagrangefunktionen sind nicht eindeutig.....	93
2.10	Eichtransformationen an der Lagrangefunktion.....	94
2.11	Zulässige Transformationen der verallgemeinerten Koordinaten.....	95
2.12	Die Hamiltonfunktion und ihr Zusammenhang mit der Lagrangefunktion.....	97
2.13	Legendre-Transformation für den Fall einer Variablen.....	98
2.14	Legendre-Transformation im Fall mehrerer Veränderlicher.....	99
2.15	Kanonische Systeme.....	101
2.16	Einige einfache kanonische Systeme.....	101
2.17	Variationsprinzip auf die Hamiltonfunktion angewandt.....	103
2.18	Symmetrien und Erhaltungssätze.....	104
2.19	Satz von E. Noether.....	105
2.20	Infinitesimale Erzeugende für Drehung um eine Achse.....	106
2.21	Exkurs über die Drehgruppe.....	108
2.22	Infinitesimale Drehungen und ihre Erzeugenden.....	110
2.23	Kanonische Transformationen.....	112
2.24	Beispiele von kanonischen Transformationen.....	116
2.25	Die Struktur der kanonischen Gleichungen.....	117
2.26	Lineare, autonome Systeme in einer Dimension.....	118
2.27	Kanonische Transformationen in kompakter Notation.....	119
2.28	Zur symplektischen Struktur des Phasenraums.....	121
2.29	Der Liouville'sche Satz.....	125
2.29.1	Lokale Form.....	125
2.29.2	Integrale Form.....	126
2.30	Beispiele zum Liouville'schen Satz.....	127
2.31	Die Poisson-Klammer.....	130
2.32	Eigenschaften der Poisson-Klammern.....	133
2.33	Infinitesimale kanonische Transformationen.....	135
2.34	Integrale der Bewegung.....	136
2.35	Hamilton-Jacobi'sche Differentialgleichung.....	139
2.36	Einfache Anwendungen der Hamilton-Jacobi'schen Differentialgleichung.....	140
2.37	Hamilton-Jacobi-Gleichung und integrable Systeme.....	144
2.37.1	Lokale Glättung von Hamilton'schen Systemen.....	145
2.37.2	Integrable Systeme.....	149
2.37.3	Winkel- und Wirkungsvariable.....	153
2.38	Störungen an quasiperiodischen Hamilton'schen Systemen.....	155

2.39	Autonome, nichtausgeartete Hamilton'sche Systeme in der Nähe von integrablen Systemen	157
2.40	Beispiele, Mittelungsmethode	159
2.40.1	Anharmonischer Oszillator	159
2.40.2	Mittlung von Störungen	161
	Anhang: Praktische Übungen	163
3.	Mechanik des starren Körpers	
3.1	Definition des starren Körpers	171
3.2	Infinitesimale Verrückung eines starren Körpers	173
3.3	Kinetische Energie und Trägheitstensor	174
3.4	Eigenschaften des Trägheitstensors	176
3.5	Der Satz von Steiner	181
3.6	Beispiele zum Satz von Steiner	182
3.7	Drehimpuls des starren Körpers	184
3.8	Kräftefreie Bewegung von starren Körpern	185
3.9	Die Euler'schen Winkel	187
3.10	Definition der Euler'schen Winkel	189
3.11	Die Bewegungsgleichungen des starren Körpers	189
3.12	Die Euler'schen Gleichungen	192
3.13	Anwendungsbeispiel: Der kräftefreie Kreisel	195
3.14	Kräftefreier Kreisel und geometrische Konstruktionen	198
3.15	Der Kreisel im Rahmen der kanonischen Mechanik	201
3.16	Beispiel: Symmetrischer Kinderkreisel im Schwerfeld	204
3.17	Anmerkung zum Kreiselproblem	207
3.18	Symmetrischer Kreisel mit Reibung: Der „Aufstehkreisel“	208
3.18.1	Eine Energiebetrachtung	210
3.18.2	Bewegungsgleichungen und Lösungen konstanter Energie	211
	Anhang: Praktische Übungen	216
4.	Relativistische Mechanik	
4.1	Schwierigkeiten der nichtrelativistischen Mechanik	220
4.2	Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit	223
4.3	Die Lorentz-Transformationen	224
4.4	Analyse der Lorentz- und Poincaré-Transformationen	230
4.4.1	Drehungen und Spezielle Lorentz-Transformationen	233
4.4.2	Bedeutung der Speziellen Lorentz-Transformationen	236
4.5	Zerlegung von Lorentz-Transformationen in ihre Komponenten	237
4.5.1	Satz über orthochrone eigentliche Lorentz-Transformationen	237
4.5.2	Korollar zum Zerlegungssatz und einige Konsequenzen	239
4.6	Addition von relativistischen Geschwindigkeiten	242
4.7	Galilei- und Lorentz-Raumzeit-Mannigfaltigkeiten	245
4.8	Bahnkurven und Eigenzeit	249
4.9	Relativistische Dynamik	251
4.9.1	Relativistisches Kraftgesetz	251
4.9.2	Energie-Impulsvektor	252
4.9.3	Die Lorentz-Kraft	256
4.10	Zeitdilatation und Längenkontraktion	257
4.11	Mehr über die Bewegung kräftefreier Teilchen	259
4.12	Die Konforme Gruppe	262

5. Geometrische Aspekte der Mechanik

5.1	Mannigfaltigkeiten von verallgemeinerten Koordinaten	266
5.2	Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	269
5.2.1	Der Euklidische Raum \mathbb{R}^n	269
5.2.2	Glatte oder differenzierbare Mannigfaltigkeiten	270
5.2.3	Beispiele für glatte Mannigfaltigkeiten	272
5.3	Geometrische Objekte auf Mannigfaltigkeiten	276
5.3.1	Funktionen und Kurven auf Mannigfaltigkeiten	277
5.3.2	Tangentialvektoren an eine glatte Mannigfaltigkeit	280
5.3.3	Das Tangentialbündel einer Mannigfaltigkeit	281
5.3.4	Vektorfelder auf glatten Mannigfaltigkeiten	283
5.3.5	Äußere Formen	286
5.4	Kalkül auf Mannigfaltigkeiten	288
5.4.1	Differenzierbare Abbildungen von Mannigfaltigkeiten	289
5.4.2	Integalkurven von Vektorfeldern	291
5.4.3	Äußeres Produkt von Einsformen	292
5.4.4	Die äußere Ableitung	294
5.4.5	Äußere Ableitung und Vektoren im \mathbb{R}^3	296
5.5	Hamilton-Jacobi'sche und Lagrange'sche Mechanik	299
5.5.1	Koordinaten-Mannigfaltigkeit Q , Geschwindigkeitsraum TQ und Phasenraum T^*Q	299
5.5.2	Die kanonische Einsform auf dem Phasenraum	303
5.5.3	Die kanonische Zweiform als symplektische Form auf M	306
5.5.4	Symplektische Zweiform und Satz von Darboux	308
5.5.5	Die kanonischen Gleichungen	311
5.5.6	Die Poisson-Klammer	315
5.5.7	Zeitabhängige Hamilton'sche Systeme	318
5.6	Lagrange'sche Mechanik und Lagrangegleichungen	320
5.6.1	Zusammenhang der beiden Formulierungen der Mechanik	320
5.6.2	Die Lagrange'sche Zweiform	322
5.6.3	Energie als Funktion auf TQ und Lagrange'sches Vektorfeld	323
5.6.4	Vektorfelder auf dem Geschwindigkeitsraum TQ und Lagrange'sche Gleichungen	325
5.6.5	Legendre-Transformation und Zuordnung von Lagrange- und Hamiltonfunktion	327
5.7	Riemann'sche Mannigfaltigkeiten in der Mechanik	329
5.7.1	Affiner Zusammenhang und Paralleltransport	330
5.7.2	Parallele Vektorfelder und Geodäten	332
5.7.3	Geodäten als Lösungen von Euler-Lagrange-Gleichungen	333
5.7.4	Der kräftefreie, unsymmetrische Kreisel	335

6. Stabilität und Chaos

6.1	Qualitative Dynamik	337
6.2	Vektorfelder als dynamische Systeme	338
6.2.1	Einige Definitionen für Vektorfelder und ihre Integalkurven	340
6.2.2	Gleichgewichtslagen und Linearisierung von Vektorfeldern	343
6.2.3	Stabilität von Gleichgewichtslagen	346
6.2.4	Kritische Punkte von Hamilton'schen Vektorfeldern	349
6.2.5	Stabilität und Instabilität beim kräftefreien Kreisel	352

6.3	Langzeitverhalten dynamischer Flüsse und Abhängigkeit von äußeren Parametern	353
6.3.1	Strömung im Phasenraum	354
6.3.2	Allgemeinere Stabilitätskriterien	356
6.3.3	Attraktoren	359
6.3.4	Die Poincaré-Abbildung	362
6.3.5	Verzweigungen von Flüssen bei kritischen Punkten	366
6.3.6	Verzweigungen von periodischen Bahnen	369
6.4	Deterministisches Chaos	371
6.4.1	Iterative Abbildungen in einer Dimension	371
6.4.2	Quasi-Definition von Chaos	373
6.4.3	Ein Beispiel: Die logistische Gleichung	376
6.5	Quantitative Aussagen über ungeordnete Bewegung	381
6.5.1	Aufbruch in deterministisches Chaos	381
6.5.2	Liapunov'sche Charakteristische Exponenten	385
6.5.3	Seltsame Attraktoren und Fraktale	388
6.6	Chaotische Bewegungen in der Himmelsmechanik	390
6.6.1	Rotationsdynamik von Planetensatelliten	391
6.6.2	Bahndynamik von Planetoiden mit chaotischem Verhalten	395

7. Kontinuierliche Systeme

7.1	Diskrete und kontinuierliche Systeme	399
7.2	Grenzübergang zum kontinuierlichen System	403
7.3	Hamilton'sches Extremalprinzip für kontinuierliche Systeme	405
7.4	Kanonisch konjugierter Impuls und Hamiltondichte	407
7.5	Beispiel: Die Pendelkette	408
7.6	Ausblick und Bemerkungen	411

Anhang

A	Einige mathematische Begriffe	417
A.1	„Ordnung“ und „modulo“	417
A.2	Abbildung	417
A.3	Stetige und differenzierbare Abbildungen	419
A.4	Ableitungen	419
A.5	Differenzierbarkeit einer Funktion	420
A.6	Variablen und Parameter	420
A.7	Lie'sche Gruppe	420
B	Einige Hinweise zum Rechnereinsatz	421
B.1	Bestimmung von Nullstellen	422
B.2	Zufallszahlen	423
B.3	Numerische Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen	423
B.4	Numerische Auswertung von Integralen	425
C	Historische Anmerkungen	426

Aufgaben	431
Lösungen der Aufgaben	459
Literatur	529
Sachverzeichnis	533
Namenverzeichnis	537