

# Inhalt

|            |                                                |           |
|------------|------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b>   | <b>Einführung</b>                              | <b>15</b> |
| <b>1.1</b> | <b>Kompetenzen für die theoretische Arbeit</b> | <b>16</b> |
| 1.1.1      | Abstraktionsvermögen                           | 16        |
| 1.1.2      | Präzises Arbeiten                              | 16        |
| 1.1.3      | Frustrationstoleranz und Kreativität           | 17        |
| 1.1.4      | Kommunikationsfähigkeit                        | 17        |
| <b>1.2</b> | <b>Themen der theoretischen Informatik</b>     | <b>18</b> |
| 1.2.1      | Berechenbarkeitstheorie                        | 18        |
| 1.2.2      | Algorithmik                                    | 19        |
| 1.2.3      | Komplexitätstheorie                            | 19        |
| <b>1.3</b> | <b>Anleitung fürs Buch</b>                     | <b>20</b> |
| <b>1.4</b> | <b>Danksagungen</b>                            | <b>21</b> |
| <br>       |                                                |           |
| <b>2</b>   | <b>Mathematische Notation</b>                  | <b>23</b> |
| <b>2.1</b> | <b>Logische Aussagen</b>                       | <b>24</b> |
| 2.1.1      | Verknüpfung von logischen Aussagen             | 24        |
| 2.1.2      | Vorrangregeln                                  | 25        |
| 2.1.3      | Variablen                                      | 26        |
| 2.1.4      | Umformungsregeln                               | 26        |
| <b>2.2</b> | <b>Mengen</b>                                  | <b>27</b> |
| 2.2.1      | Mengenoperationen                              | 28        |
| 2.2.2      | Quantoren und Prädikate                        | 29        |
| 2.2.3      | Mengenbeziehungen                              | 30        |
| 2.2.4      | Tupel                                          | 31        |
| <b>2.3</b> | <b>Relationen und Funktionen</b>               | <b>32</b> |
| 2.3.1      | Binäre Relationen                              | 32        |
| 2.3.2      | Funktionen                                     | 33        |
| 2.3.3      | Binäre Operationen über Mengen                 | 36        |

- 2.4    **Graphen** ..... 37
  - 2.4.1    Grundbegriffe ..... 37
  - 2.4.2    Pfade, Kreise und Bäume ..... 38
  - 2.4.3    Teilgraphen und Spannbäume ..... 39
  - 2.4.4    Gerichtete Kanten ..... 39
  - 2.4.5    Gewichtete Graphen ..... 39
- 2.5    **Unendlichkeiten und Abzählbarkeit** ..... 40
  - 2.5.1    Abzählbar unendliche Mengen ..... 40
  - 2.5.2    Überabzählbar unendliche Mengen ..... 41
- 2.6    **Beweistechniken** ..... 42
  - 2.6.1    Grundprinzipien des Beweisens ..... 42
  - 2.6.2    Direkter Beweis ..... 44
  - 2.6.3    Fallunterscheidungen ..... 46
  - 2.6.4    Beweis per Kontraposition ..... 48
  - 2.6.5    Indirekter Beweis / Beweis per Widerspruch ..... 49
  - 2.6.6    Vollständige Induktion ..... 50
  - 2.6.7    Konstruktive und nichtkonstruktive Beweise ..... 54
  - 2.6.8    Typische Schwierigkeiten und Fehler beim Beweisen ... 54
- 2.7    **Aufgaben** ..... 57
- 2.8    **Lösungen** ..... 58

**TEIL I    Berechenbarkeit und formale Sprachen**

- 3    **Einführung in die Berechenbarkeitstheorie** ..... 67
- 3.1    **Algorithmus** ..... 68
- 3.2    **Zu viele Funktionen** ..... 69
- 3.3    **Das Halteproblem** ..... 70
- 3.4    **Kontrollfragen** ..... 72
- 3.5    **Antworten** ..... 72

|          |                                                  |           |
|----------|--------------------------------------------------|-----------|
| <b>4</b> | <b>Problemtypen</b>                              | <b>73</b> |
| 4.1      | Formalisierung von Problemen .....               | 73        |
| 4.2      | Funktionen berechnen .....                       | 75        |
| 4.3      | Datencodierung .....                             | 75        |
| 4.4      | Sprachen entscheiden .....                       | 78        |
| 4.5      | Problemklassen der Berechenbarkeitstheorie ..... | 79        |
| 4.6      | Aufgaben .....                                   | 82        |
| 4.7      | Lösungen .....                                   | 83        |
| <b>5</b> | <b>Einführung in formale Sprachen</b>            | <b>85</b> |
| 5.1      | Definition .....                                 | 85        |
| 5.2      | Die Chomsky-Hierarchie .....                     | 88        |
| 5.3      | Aufgaben .....                                   | 89        |
| 5.4      | Lösungen .....                                   | 90        |
| <b>6</b> | <b>Reguläre Sprachen</b>                         | <b>91</b> |
| 6.1      | Deterministische endliche Automaten .....        | 92        |
| 6.1.1    | Formale Definition .....                         | 93        |
| 6.1.2    | Sprachbeweise .....                              | 95        |
| 6.1.3    | Simultane strukturelle Induktion .....           | 98        |
| 6.1.4    | Automatenentwurf .....                           | 100       |
| 6.2      | Nichtdeterministische endliche Automaten .....   | 103       |
| 6.2.1    | Formale Definition .....                         | 105       |
| 6.2.2    | Erweiterung: Epsilonübergänge .....              | 106       |
| 6.2.3    | Äquivalenz zu deterministischen Automaten .....  | 108       |
| 6.3      | Grammatiken .....                                | 111       |
| 6.3.1    | Formale Definition .....                         | 113       |
| 6.3.2    | Reguläre Grammatiken .....                       | 114       |

|             |                                                                                   |     |
|-------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 6.3.3       | Varianten regulärer Grammatiken .....                                             | 115 |
| 6.3.4       | Äquivalenz zu endlichen Automaten .....                                           | 116 |
| <b>6.4</b>  | <b>Reguläre Ausdrücke</b> .....                                                   | 120 |
| 6.4.1       | Formale Definition .....                                                          | 120 |
| 6.4.2       | Äquivalenz zu endlichen Automaten .....                                           | 121 |
| <b>6.5</b>  | <b>Abschlusseigenschaften</b> .....                                               | 127 |
| 6.5.1       | Abgeschlossenheit unter Vereinigung, Konkatenation<br>und kleenescher Hülle ..... | 127 |
| 6.5.2       | Abgeschlossenheit unter Schnitt und Differenz .....                               | 128 |
| 6.5.3       | Abgeschlossenheit unter Komplement .....                                          | 129 |
| 6.5.4       | Abgeschlossenheit unter Spiegelung .....                                          | 130 |
| 6.5.5       | Abgeschlossenheit unter Homomorphismen .....                                      | 130 |
| 6.5.6       | Beweise mit Abschlusseigenschaften .....                                          | 131 |
| <b>6.6</b>  | <b>Entscheidungsprobleme auf regulären Sprachen</b> .....                         | 132 |
| <b>6.7</b>  | <b>Äquivalenzklassenzerlegung</b> .....                                           | 134 |
| 6.7.1       | Die Nerode-Relation .....                                                         | 135 |
| 6.7.2       | Minimale Automaten .....                                                          | 136 |
| 6.7.3       | Der Table-Filling-Algorithmus .....                                               | 137 |
| <b>6.8</b>  | <b>Nichtreguläre Sprachen</b> .....                                               | 139 |
| 6.8.1       | Der Satz von Myhill-Nerode .....                                                  | 139 |
| 6.8.2       | Das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen .....                                     | 140 |
| 6.8.3       | Beweise mit Abschlusseigenschaften .....                                          | 143 |
| <b>6.9</b>  | <b>Ausblick</b> .....                                                             | 144 |
| <b>6.10</b> | <b>Aufgaben</b> .....                                                             | 144 |
| <b>6.11</b> | <b>Lösungen</b> .....                                                             | 149 |
| <br>        |                                                                                   |     |
| <b>7</b>    | <b>Kontextfreie Sprachen</b> .....                                                | 161 |
| <hr/>       |                                                                                   |     |
| <b>7.1</b>  | <b>Kontextfreie Grammatiken</b> .....                                             | 162 |
| <b>7.2</b>  | <b>Eindeutige Ableitungsbäume</b> .....                                           | 164 |
| <b>7.3</b>  | <b>Chomsky-Normalform</b> .....                                                   | 166 |
| <b>7.4</b>  | <b>Exkurs: Kellerautomaten</b> .....                                              | 170 |
| 7.4.1       | Formale Definition .....                                                          | 172 |
| 7.4.2       | Varianten .....                                                                   | 174 |

|             |                                                               |     |
|-------------|---------------------------------------------------------------|-----|
| <b>7.5</b>  | <b>Abschlusseigenschaften</b> .....                           | 175 |
| <b>7.6</b>  | <b>Entscheidungsprobleme auf kontextfreien Sprachen</b> ..... | 176 |
| 7.6.1       | Wortproblem: Der Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus (CYK) ..... | 176 |
| 7.6.2       | Leerheitsproblem .....                                        | 180 |
| <b>7.7</b>  | <b>Nicht-kontextfreie Sprachen</b> .....                      | 181 |
| 7.7.1       | Das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen .....             | 181 |
| 7.7.2       | Beweise mit Abschlusseigenschaften .....                      | 183 |
| <b>7.8</b>  | <b>Ausblick</b> .....                                         | 183 |
| <b>7.9</b>  | <b>Aufgaben</b> .....                                         | 184 |
| <b>7.10</b> | <b>Lösungen</b> .....                                         | 186 |

## **8 Kontextsensitive Sprachen** 193

---

|            |                                                             |     |
|------------|-------------------------------------------------------------|-----|
| <b>8.1</b> | <b>Kontextsensitive und monotone Grammatiken</b> .....      | 194 |
| <b>8.2</b> | <b>Das Wortproblem auf kontextsensitiven Sprachen</b> ..... | 195 |

## **9 Aufzählbare Sprachen** 197

---

|            |                                                  |     |
|------------|--------------------------------------------------|-----|
| <b>9.1</b> | <b>Turingmaschinen</b> .....                     | 199 |
| 9.1.1      | Berechnungen mit Turingmaschinen .....           | 200 |
| 9.1.2      | Varianten und Ausblick .....                     | 201 |
| <b>9.2</b> | <b>While-Programme</b> .....                     | 202 |
| 9.2.1      | Syntax und Semantik .....                        | 203 |
| 9.2.2      | Identität und konstante Funktionen .....         | 205 |
| 9.2.3      | Einfache Arithmetik: Addition .....              | 206 |
| 9.2.4      | Aufrufen von Unterprogrammen .....               | 209 |
| 9.2.5      | Fallunterscheidungen, Logik und Vergleiche ..... | 213 |
| 9.2.6      | For-Schleifen .....                              | 215 |
| 9.2.7      | Cantorsche Paarungsfunktion .....                | 215 |
| 9.2.8      | Datenstrukturen .....                            | 217 |
| <b>9.3</b> | <b>Gödelnummern</b> .....                        | 218 |
| <b>9.4</b> | <b>Das universelle While-Programm</b> .....      | 220 |

|      |                                                         |     |
|------|---------------------------------------------------------|-----|
| 9.5  | Das schrittbeschränkte universelle While-Programm ..... | 223 |
| 9.6  | Diagonalisierung und min-Suche .....                    | 224 |
| 9.7  | Prädikate für semi-entscheidbare Sprachen .....         | 226 |
| 9.8  | Semi-Entscheidbarkeit vs. Aufzählbarkeit .....          | 227 |
| 9.9  | Das S-m-n-Theorem .....                                 | 228 |
| 9.10 | Das kleenesche Rekursionstheorem .....                  | 230 |
| 9.11 | Weitere Modelle und Charakterisierungen .....           | 233 |
| 9.12 | Aufgaben .....                                          | 233 |
| 9.13 | Lösungen .....                                          | 235 |

**10 Nicht Berechenbares** 241

---

|      |                                              |     |
|------|----------------------------------------------|-----|
| 10.1 | Beweise mit KRT .....                        | 243 |
| 10.2 | Der Satz von Rice .....                      | 244 |
| 10.3 | Reduktionen .....                            | 246 |
| 10.4 | RE-Vollständigkeit .....                     | 250 |
| 10.5 | Ausblick: Die arithmetische Hierarchie ..... | 251 |
| 10.6 | Aufgaben .....                               | 252 |
| 10.7 | Lösungen .....                               | 254 |

**TEIL II Algorithmik**

**11 Einführung in Algorithmik** 261

---

**12 Obere Schranken für Laufzeiten** 263

---

|      |                                      |     |
|------|--------------------------------------|-----|
| 12.1 | Das Maschinenmodell .....            | 264 |
| 12.2 | Die Laufzeit eines Algorithmus ..... | 267 |

|             |                                      |     |
|-------------|--------------------------------------|-----|
| <b>12.3</b> | <b>Die Größe einer Eingabe</b> ..... | 268 |
| <b>12.4</b> | <b>Die Landau-Notation</b> .....     | 268 |
| <b>12.5</b> | <b>Aufgaben</b> .....                | 271 |
| <b>12.6</b> | <b>Lösungen</b> .....                | 272 |

## **13 Laufzeiten von Datenstrukturen** 275

---

|             |                                                         |     |
|-------------|---------------------------------------------------------|-----|
| <b>13.1</b> | <b>Arrays</b> .....                                     | 275 |
| <b>13.2</b> | <b>Listen</b> .....                                     | 277 |
| <b>13.3</b> | <b>Verschachtelte Datenstrukturen und Graphen</b> ..... | 279 |
| <b>13.4</b> | <b>Aufgaben</b> .....                                   | 281 |
| <b>13.5</b> | <b>Lösungen</b> .....                                   | 282 |

## **14 Brute-Force-Algorithmen** 285

---

|             |                                       |     |
|-------------|---------------------------------------|-----|
| <b>14.1</b> | <b>Lineare Suche</b> .....            | 286 |
| <b>14.2</b> | <b>Backtracking/Tiefensuche</b> ..... | 288 |
| <b>14.3</b> | <b>Aufgaben</b> .....                 | 292 |
| <b>14.4</b> | <b>Lösungen</b> .....                 | 293 |

## **15 Greedy-Algorithmen** 295

---

|             |                                           |     |
|-------------|-------------------------------------------|-----|
| <b>15.1</b> | <b>Beweis mit Austauschargument</b> ..... | 296 |
| 15.1.1      | Farbeimer kaufen .....                    | 296 |
| 15.1.2      | Minimale Spannbäume .....                 | 299 |
| <b>15.2</b> | <b>Greedy stays ahead</b> .....           | 302 |
| <b>15.3</b> | <b>Aufgaben</b> .....                     | 304 |
| <b>15.4</b> | <b>Lösungen</b> .....                     | 306 |

|             |                                     |     |
|-------------|-------------------------------------|-----|
| <b>16</b>   | <b>Divide and Conquer</b>           | 313 |
| <hr/>       |                                     |     |
| <b>16.1</b> | <b>Mergesort</b>                    | 314 |
| 16.1.1      | Algorithmus                         | 314 |
| 16.1.2      | Korrektheit                         | 316 |
| 16.1.3      | Laufzeit                            | 317 |
| <b>16.2</b> | <b>Binäre Suche</b>                 | 319 |
| 16.2.1      | Algorithmus                         | 320 |
| 16.2.2      | Korrektheit                         | 320 |
| 16.2.3      | Laufzeit                            | 321 |
| <b>16.3</b> | <b>Multiplikation großer Zahlen</b> | 321 |
| 16.3.1      | Algorithmus                         | 322 |
| 16.3.2      | Laufzeitanalyse                     | 323 |
| 16.3.3      | Der Algorithmus von Karazuba        | 324 |
| <b>16.4</b> | <b>Das Mastertheorem</b>            | 325 |
| <b>16.5</b> | <b>Ausblick</b>                     | 326 |
| <b>16.6</b> | <b>Aufgaben</b>                     | 327 |
| <b>16.7</b> | <b>Lösungen</b>                     | 329 |
| <br>        |                                     |     |
| <b>17</b>   | <b>Dynamische Programmierung</b>    | 335 |
| <hr/>       |                                     |     |
| <b>17.1</b> | <b>Fibonacci-Zahlen</b>             | 336 |
| <b>17.2</b> | <b>Rückgeld geben</b>               | 337 |
| <b>17.3</b> | <b>Der Algorithmus von Dijkstra</b> | 341 |
| <b>17.4</b> | <b>Aufgaben</b>                     | 344 |
| <b>17.5</b> | <b>Lösungen</b>                     | 346 |
| <br>        |                                     |     |
| <b>18</b>   | <b>Amortisierte Analyse</b>         | 351 |
| <hr/>       |                                     |     |
| <b>18.1</b> | <b>Dynamische Arrays</b>            | 351 |
| <b>18.2</b> | <b>Guthabenmethode</b>              | 353 |
| <b>18.3</b> | <b>Ausblick</b>                     | 353 |

# TEIL III Komplexitätstheorie

|           |                                                                          |            |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>19</b> | <b>Einführung in die Komplexitätstheorie</b>                             | <b>357</b> |
| 19.1      | Die Komplexität eines Problems .....                                     | 358        |
| 19.2      | Bedingte Schranken .....                                                 | 358        |
| 19.3      | Auswege für schwierige Probleme .....                                    | 359        |
| <b>20</b> | <b>Beweistechniken für untere Schranken</b>                              | <b>361</b> |
| 20.1      | Die Ausgabegröße .....                                                   | 362        |
| 20.2      | Das informationstheoretische Argument .....                              | 363        |
| 20.2.1    | Analyse der Ablaufpfade .....                                            | 364        |
| 20.2.2    | Analyse des Informationsgewinns pro Anfrage .....                        | 366        |
| 20.3      | Das Adversary-Argument .....                                             | 367        |
| 20.4      | Reduktionen .....                                                        | 370        |
| 20.5      | Aufgaben .....                                                           | 372        |
| 20.6      | Lösungen .....                                                           | 374        |
| <b>21</b> | <b>P vs. NP: Bedingte untere Schranken</b>                               | <b>377</b> |
| 21.1      | Die Komplexitätsklasse P .....                                           | 378        |
| 21.2      | Die Komplexitätsklasse NP .....                                          | 380        |
| 21.2.1    | Ein Praxisbeispiel: Independent Set .....                                | 381        |
| 21.2.2    | Die Definition von (Nicht-)Determinismus .....                           | 383        |
| 21.2.3    | Nichtdeterministisch berechnen und deterministisch<br>verifizieren ..... | 386        |
| 21.3      | Polynomialzeitreduktionen .....                                          | 388        |
| 21.3.1    | Definition .....                                                         | 389        |
| 21.3.2    | Beispiel: Independent Set und Vertex Cover .....                         | 390        |
| 21.4      | NP-schwere und NP-vollständige Probleme .....                            | 392        |
| 21.4.1    | Der Satz von Cook .....                                                  | 395        |

- 21.4.2 Von CNF-SAT zu 3-SAT ..... 396
  - 21.4.3 Von 3-SAT zu IS ..... 398
  - 21.4.4 Von 3-SAT zu Subset-Sum ..... 401
- 21.5 Ausblick: Mehr NP-vollständige Probleme ..... 404**
- 21.6 Aufgaben ..... 405**
- 21.7 Lösungen ..... 406**

**22 Ausblick: Parametrisierte Analyse**

408

---

- Index ..... 410