

Inhaltsverzeichnis

1	Analysis 2D	1
1.1	Zahlen bitte	1
1.1.1	Aufbau des Zahlensystems	1
1.1.2	Vollständigkeit der reellen Zahlen	4
1.2	Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$, Grundlagen	6
1.2.1	Komplexe Zahlen und ihre Darstellung	6
1.2.2	Das Rechnen mit komplexen Zahlen	8
1.2.3	Additionstheoreme	10
1.3	Folgen und Grenzwerte	11
1.3.1	Explizit gegebene Folgen	12
1.3.2	Rekursiv definierte Folgen	14
1.3.3	Folgen von 2D-Punkten und Bildern	16
1.4	Reihen	19
1.4.1	Geometrische Reihe	19
1.4.2	Arithmetische Folge	20
1.4.3	Harmonische Reihe	21
1.4.4	Berühmte Reihen	23
1.4.5	Konvergenz und Umordnung von Reihen	24
1.5	Darstellungsvielfalt und Funktionstypen	26
1.5.1	Darstellungsvielfalt	26
1.5.2	Stetigkeit von Funktionen	29
1.5.3	Funktionstypen	30
1.5.4	Funktionen-Bauhof	40
1.5.5	Komplexe Funktionen verbiegen Gitter	46
1.6	Differentialrechnung	52
1.6.1	Steigung und Ableitung, explizit kartesisch	52
1.6.2	Implizite kartesische Ableitung	57
1.6.3	Steigung und Ableitung bei Parameter- und Polarkurven	59
1.7	Funktionen untersuchen	61
1.7.1	Lokale Extremstellen	62
1.7.2	Oszillierende Funktionen, Sinus-Wunderdinge	63
1.7.3	Krümmungen	66
1.7.4	Wendepunkte	70
1.8	Integralrechnung	70
1.8.1	Definition von Riemann und Grundlagen	71
1.8.2	Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	72
1.8.3	Wichtige Eigenschaften des bestimmten Integrals	75
1.8.4	Partielle Integration und Substitutionsregel	81
1.8.5	Flächenfragen in der ganzen Darstellungsvielfalt	83
1.8.6	Fläche bei Kurven in Parameterdarstellung	84

1.8.7	Flächen bei Polarkurven	85
1.8.8	Bogenlänge bei Funktionen und Parameterkurven	86
1.8.9	Bogenlänge bei Polarkurven	87
1.8.10	Volumen von Rotationskörpern	88
1.8.11	Uneigentliche Integrale	90
1.9	Anwendungen der Infinitesimalrechnung	91
1.9.1	Harmonie der rotierten Quadriken	92
1.9.2	Taylorreihen und Landau-Symbolik	94
1.9.3	Kriterien für lokale Extremstellen und Wendepunkte	101
1.9.4	Regel von L'Hospital	105
1.9.5	Fourierreihen	110
1.9.6	Fourier-Transformation	123
1.9.7	Laplace-Transformation	127
2	Lineare Algebra	131
2.1	Algebra und Grundlagen der linearen Algebra	131
2.1.1	Algebraische Strukturen: Gruppen, Ringe, Körper	132
2.1.2	Vektorräume	135
2.1.3	Wichtige Vektorräume: Vektorpfeile und n -Tupel	137
2.1.4	Vektorräume von Funktionen, Funktionenräume	141
2.1.5	Skalarprodukt, Norm und euklidische Vektorräume	143
2.1.6	Nützliche Begriffe in euklidischen Vektorräumen	146
2.1.7	Lineare Unabhängigkeit, Basis, Dimension	149
2.2	Analytische Geometrie	152
2.2.1	Der Punktraum $\mathbb{R}^m$ und affine Unterräume	153
2.2.2	Der Normalenvektor und seine Rolle	154
2.2.3	Geraden im $\mathbb{R}^2$	157
2.2.4	Ebenen im $\mathbb{R}^3$	159
2.2.5	Körper in der Geometrie	161
2.3	Matrizen und Determinanten: Grundverständnis	165
2.3.1	Grundlegendes zu Matrizen	165
2.3.2	Multiplikation von Matrizen	166
2.3.3	Quadratische Matrizen	169
2.3.4	Determinanten und inverse Matrizen: Grundverständnis	171
2.4	LGS, Determinanten, Matrizen: Weiterführung	174
2.4.1	Schnitt von Ebenen, geometrische Bedeutung der Rechnung	174
2.4.2	Schnitt von Geraden, geometrische Bedeutung der Rechnung	177
2.4.3	Lineare Gleichungssysteme (LGS) im Überblick	178
2.4.4	Homogene und inhomogene lineare Gleichungssysteme	180
2.4.5	Determinanten für $n \times n$ -Matrizen und ihre Berechnung	182
2.4.6	Cramer'sche Regel für LGS, inverse Matrix berechnen	185
2.4.7	Geometrische Eigenschaften mit Hilfe der linearen Algebra	186
2.4.8	Kreuzprodukt und Spatprodukt	187

2.4.9	Intermezzo: Division von Vektoren?	190
2.4.10	Rechnen: Von Hand oder mit dem Computer?	192
2.5	Lineare Abbildungen und Matrizen	193
2.5.1	Zusammenhang zwischen linearen Abbildungen und Matrizen	193
2.5.2	Lineare Abbildungen in der Ebene verformen Gitter	205
2.5.3	Eigenwerte und -vektoren der Matrizen linearer Abbildungen	206
2.6	Orthogonalität	209
2.6.1	Orthogonalprojektionen	210
2.6.2	Orthogonalisierungsverfahren	216
2.7	Quadriken und Hauptachsentransformation	218
2.7.1	Allgemeine Gleichungen der Quadriken (Kegelschnitte) im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$	219
2.7.2	Diagonalisierung von Matrizen	222
2.7.3	Singulärwertzerlegung einer Matrix (SVD)	225
2.7.4	Hauptachsentransformation für Kegelschnitte	231
2.7.5	Eine Anwendung aus der Physik	236
2.7.6	Hauptachsentransformation für 3D-Quadriken	239
2.7.7	3D-Quadrikgleichungen in Hauptlage	242
2.7.8	Regelflächen	245
3	Analysis 3D	247
3.1	Funktionen	247
3.2	Differentialrechnung 3D	249
3.2.1	Tangentialebenen	250
3.2.2	Richtungsableitung, Gradient und Jacobi-Matrix	256
3.2.3	Kettenregel für mehrere Veränderliche	261
3.2.4	Mehrfache partielle Ableitungen und der Satz von Schwarz	265
3.2.5	Divergenz und Rotation in Vektorfeldern	267
3.3	Optimierung einer Funktion zweier Veränderlicher	274
3.3.1	Taylorpolynome einer Funktion zweier Veränderlicher	275
3.3.2	Notwendige und hinreichende Bedingungen für Extrema	276
3.3.3	Mehr als zwei Veränderliche	278
3.3.4	Optimierung mit Nebenbedingungen nach Lagrange	279
3.4	Integrale 3D	284
3.4.1	Mehrdimensionale Integrale begreifen und berechnen	284
3.4.2	Integration mit Koordinatentransformation	290
3.4.3	Gauß'scher Satz über Quellen und Flüsse	294
3.4.4	Satz von Stokes	302
4	Differentialgleichungen DGLn	307
4.1	Einführung in DGLn	307
4.2	Ein weiter Blick über die DGLn	309
4.3	Gewöhnliche DGLn, Grundlagen	311
4.3.1	Typen von Differentialgleichungen (DGLn)	311
4.3.2	Richtungsfelder	312

4.3.3	Isoklinen	317
4.3.4	Phasenraumdiagramme	318
4.4	Anfangswert-Probleme und Eindeutigkeit von Lösungen	325
4.4.1	Anfangswertprobleme	325
4.4.2	Lösungsraum von linearen DGLn	328
4.5	Laplace-Transformationen	329
4.5.1	Lösungen suchen in einer anderen Welt	329
4.5.2	Lineare DGLn mit konst. Koeff. und Laplace-Transformation	331
4.5.3	Homogene lineare DGL und Laplace-Transformation	333
4.5.4	Partialbruchzerlegung bei der Laplace-Transformation	334
4.5.5	Die Laplace-Rücktransformation $\mathcal{L}^{-1}$	336
4.5.6	Struktur der Lösungen von homogenen linearen DGLn	337
4.5.7	Inhomogene lineare DGL	339
4.5.8	Laplace-Transformation für periodische Funktionen	340
4.5.9	Werkzeugunterstützung	344
4.5.10	Edelstein: Euler'sche Formel	345
4.5.11	Lösungen ausgewählter DGLn	347
4.6	Systeme von DGLn	349
4.6.1	DGL-System beim gekoppelten Pendel	350
4.6.2	Allgemeine Systeme von DGLn	352
4.6.3	Autonome, lineare Systeme	354
4.6.4	2-dimensionale lineare Systeme	358
4.6.5	Inhomogene Systeme von DGLn	362
4.6.6	Nichtlineare Systeme von DGLn	363
4.7	Partielle DGLn	366
4.7.1	Schwingende Saite	367
4.7.2	Erste Lösung der Schwingungsgleichung	368
4.7.3	Randbedingungen	369
4.7.4	Zweite Lösung der Schwingungsgleichung	370
4.8	PDGLn 1. Ordnung	372
4.8.1	Visualisierung und Lösung quasi-linearer PDGLn 1. Ordnung	372
4.8.2	Die charakteristischen Kurven	374
4.8.3	Cauchy-Anfangsbedingungen und Charakteristiken	375
4.8.4	Lösung durch Potenzreihenentwicklung	378
4.9	PDGLn 2. Ordnung	379
4.9.1	Charakteristiken und drei Typen von PDGLn	380
4.9.2	Charakteristiken als neue Koordinatenlinien	381
4.9.3	Eigenschaften und Beispiele	382
5	Numerik	387
5.1	Numerische Fehler	387
5.1.1	Fehlerarten und Ursachen	388
5.1.2	Instabilität	388

5.2	Nullstellensuche	391
5.2.1	Bisektion und Intervallschachtelung	391
5.2.2	Sekantenverfahren	391
5.2.3	Newtonverfahren	392
5.2.4	Iteration, Fixpunkt und Konvergenz	393
5.2.5	Heronverfahren	396
5.3	Interpolation und Kurven gestalten	398
5.3.1	Interpolation mit Polynomen	398
5.3.2	Interpolation mit kubischen Splines	402
5.3.3	Kurvengestaltung mit Béziersplines	407
5.3.4	Raumflächengestaltung mit Bézierflächen	410
5.4	B-Splines und NURBS	411
5.4.1	Béziersplines auf einem größeren Parameterintervall	412
5.4.2	B-Splines	413
5.4.3	Gestaltung mit NURBS, Teil 1	417
5.4.4	NURBS, Teil 2, mit nicht uniformen B-Splines	427
5.5	Numerische Integration	431
5.5.1	Kepler'sche Regel	432
5.5.2	Simpson'sche Regel	436
5.5.3	Weitere Verfahren	438
5.5.4	Numerische Raumintegrale	445
5.6	DGLn numerisch lösen	448
5.6.1	Eulerverfahren	450
5.6.2	Heunverfahren	454
5.6.3	Numerische Integration liefert Verfahren für DGLn	458
5.6.4	Runge-Kutta-Verfahren	460
5.6.5	Skurriles zur exakten Lösung von $y' = y^2 - x$	461
5.6.6	Weitere Methoden und Aspekte	463
6	Geometrie und Werkzeuge	469
6.1	Geometrie	469
6.1.1	Besondere Punkte im Dreieck	469
6.1.2	Kreiswinkelsätze	470
6.1.3	Trigonometrische Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck	471
6.1.4	Satzgruppe des Pythagoras	472
6.1.5	Cosinussatz	473
6.1.6	Konstruktion wahrer Längen und Winkel für Körper	473
6.2	Geometrische Aspekte der komplexen Zahlen	474
6.2.1	Kreisspiegelung, Inversion am Kreis	474
6.2.2	Riemann'sche Zahlenkugel	475
6.3	Werkzeuge	476
6.3.1	GeoGebra	476
6.3.2	Weitere hilfreiche Tipps	478

Literaturverzeichnis 479

Sachverzeichnis 483