

Inhaltsverzeichnis

1	Zahlen, Gleichungen und Gleichungssysteme	1
1.1	Mengen	3
1.2	Natürliche Zahlen	5
1.2.1	Peanosche Axiome	6
1.2.2	Vollständige Induktion	7
1.2.3	Geometrische Summenformel	10
1.2.4	Permutationen	10
1.2.5	Der binomische Lehrsatz	12
1.3	Reelle Zahlen	13
1.3.1	Zahlenmengen und Operationen	13
1.3.2	Die Rechengesetze für reelle Zahlen	14
1.3.3	Potenzrechnen	16
1.3.4	Logarithmen	17
1.3.5	Anordnung der reellen Zahlen	18
1.4	Gleichungen und Ungleichungen	20
1.4.1	Gleichungen	20
1.4.2	Ungleichungen	24
1.5	Lineare Gleichungssysteme	27
1.5.1	Einführung	27
1.5.2	Begriffsbildung und Notation	29
1.5.3	Das Lösen von linearen Gleichungssystemen	30
1.6	Mathematische Beweismethoden	36
1.6.1	Vollständige Induktion	37
1.6.2	Direkter Beweis	37
1.6.3	Beweis durch Widerspruch	37
1.6.4	Beweis durch Gegenbeispiel	38
1.7	Aufgaben zu Zahlen, Gleichungen und Gleichungssystemen	39
2	Vektoren und Vektorrechnung	43
2.1	Vektoren im $\mathbb{R}^2$	46
2.1.1	Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	46
2.1.2	Addition zweier Vektoren	47
2.1.3	Die Länge (der Betrag) eines Vektors	47
2.1.4	Das Skalarprodukt zweier Vektoren	48
2.1.5	Geometrische Anwendung	52
2.2	Vektoren im $\mathbb{R}^3$	54
2.2.1	Rechenregeln für Vektoren	54
2.2.2	Projektion eines Vektors	57
2.2.3	Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) zweier Vektoren	59
2.2.4	Das Spatprodukt von drei Vektoren	63

2.3	Geraden und Ebenen im $\mathbb{R}^3$	65
2.3.1	Vektorielle Darstellung von Geraden	65
2.3.2	Lage zweier Geraden zueinander	66
2.3.3	Abstandsberechnung zu Geraden	68
2.3.4	Vektorielle Darstellung von Ebenen	71
2.3.5	Lage zweier Ebenen zueinander	74
2.3.6	Abstandsberechnung zu Ebenen	76
2.3.7	Berechnung des Schnittes einer Geraden mit einer Ebene	77
2.4	Vektorräume	80
2.4.1	Vektorrechnung im $\mathbb{R}^n$	80
2.4.2	Vektorräume	82
2.4.3	Linearkombination und Erzeugnis	86
2.4.4	Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit	88
2.4.5	Basis und Dimension	91
2.5	Aufgaben zur Vektorrechnung	96
3	Matrizen und Determinanten	101
3.1	Matrizen	103
3.1.1	Einführung, spezielle Matrizen	103
3.1.2	Rechenoperationen für Matrizen	105
3.1.3	Inverse Matrix	109
3.1.4	Lineare Abbildungen	113
3.1.5	Anwendungsbeispiele	114
3.2	Determinanten	117
3.2.1	Einführung	117
3.2.2	Rechenregeln für zweireihige Determinanten	118
3.2.3	n -reihige Determinanten	121
3.2.4	Anwendungen von Determinanten	126
3.3	Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen	128
3.3.1	Lineare Gleichungssysteme, Rang	128
3.3.2	Anwendungen	133
3.4	Aufgaben zu Matrizen und Determinanten	138
4	Elementare Funktionen	141
4.1	Allgemeine Funktionseigenschaften	143
4.1.1	Grundbegriffe	143
4.1.2	Allgemeine Funktionseigenschaften	148
4.1.3	Umkehrfunktion (inverse Funktion)	151
4.2	Polynome	156
4.2.1	Festlegung von Polynomen durch gegebene Wertepaare	157
4.2.2	Koeffizientenvergleich	158
4.2.3	Teilbarkeit durch einen Linearfaktor	159
4.2.4	Nullstellenproblem	160
4.2.5	Interpolationspolynome mit dem Newton-Algorithmus	163

4.3	Rationale Funktionen	166
4.3.1	Definitionslücken, Nullstellen, Pole	167
4.3.2	Verhalten im Unendlichen	168
4.4	Potenz- und Wurzelfunktionen	171
4.5	Exponential- und Logarithmusfunktion	173
4.5.1	Exponentialfunktion	174
4.5.2	Logarithmusfunktion	176
4.6	Trigonometrische Funktionen	179
4.6.1	Grundbegriffe	179
4.6.2	Sinus- und Kosinusfunktion	179
4.6.3	Tangens- und Kotangensfunktion	184
4.6.4	Zusammenstellung wichtiger trigonometrischer Formeln	185
4.7	Arkusfunktionen	186
4.7.1	Arkussinusfunktion	187
4.7.2	Arkuskosinusfunktion	188
4.7.3	Arkustangensfunktion	189
4.7.4	Arkuskotangensfunktion	190
4.8	Aufgaben zu elementaren Funktionen	192
5	Komplexe Zahlen	195
5.1	Darstellung komplexer Zahlen	198
5.1.1	Algebraische Normalform	198
5.1.2	Trigonometrische Normalform	199
5.1.3	Exponentielle Normalform	200
5.1.4	Umformungen der Normalformen	201
5.2	Komplexe Rechenoperationen	204
5.2.1	Addition	204
5.2.2	Subtraktion	204
5.2.3	Multiplikation	205
5.2.4	Division	207
5.2.5	Potenzen	209
5.2.6	Wurzeln	210
5.2.7	Fundamentalsatz der Algebra	212
5.3	Anwendungen	214
5.3.1	Beschreibung harmonischer Schwingungen im Komplexen	214
5.3.2	Superposition gleichfrequenter Schwingungen	215
5.3.3	Beschreibung von RCL-Gliedern bei Wechselströmen	219
5.3.4	Beispiele für RCL-Wechselstromschaltungen	221
5.4	Aufgaben zu komplexen Zahlen	223
6	Grenzwert und Stetigkeit	225
6.1	Reelle Zahlenfolgen	227
6.2	Funktionsgrenzwert	235
6.3	Stetigkeit einer Funktion	240

6.4	Intervallhalbierungs-Methode	242
6.5	Aufgaben zu Grenzwert und Stetigkeit	245
7	Differenzialrechnung	247
7.1	Einführung	249
7.2	Rechenregeln bei der Differenziation	255
7.2.1	Faktorregel	255
7.2.2	Summenregel	255
7.2.3	Produktregel	256
7.2.4	Quotientenregel	257
7.2.5	Kettenregel	258
7.2.6	Begründung der Formeln 7.2.1 - 7.2.5	260
7.2.7	Ableitung der Umkehrfunktion	261
7.2.8	Logarithmische Differenziation	264
7.2.9	Implizite Differenziation	266
7.3	Anwendungsbeispiele aus Physik und Technik	268
7.3.1	Kinematik	268
7.3.2	Induktionsgesetz	269
7.3.3	Elektrostatik	270
7.4	Differenzial einer Funktion	271
7.4.1	Linearisierung von Funktionen	272
7.4.2	Fehlerrechnung	274
7.5	Anwendungen in der Mathematik	276
7.5.1	Geometrische Bedeutung von f' und f''	276
7.5.2	Relative Extremalwerte	277
7.5.3	Wendepunkte und Sattelpunkte	278
7.5.4	Kurvendiskussion	280
7.6	Extremwertaufgaben (Optimierungsprobleme)	283
7.7	Sätze der Differenzialrechnung	286
7.7.1	Satz über die Exponentialfunktion	286
7.7.2	Mittelwertsatz	287
7.7.3	Die Regeln von l'Hospital	288
7.8	Newton-Verfahren	291
7.9	Aufgaben zur Differenzialrechnung	295
	Literaturverzeichnis	299
	Index	301
	Zusätzliche Infos	307
	Homepage zum Buch	308