

# Inhalt

1	Einleitung .....	9
1.1	Grundbegriffe und erste Einteilung .....	9
1.1.1	Differentialgleichungen $n$ -ter Ordnung .....	9
1.1.2	Differentialgleichungssysteme $n$ -ter Ordnung .....	13
1.1.3	Lineare Differentialgleichungen und lineare Systeme .....	20
1.2	Besondere Aufgabenstellungen .....	24
1.2.1	Anfangswertaufgaben .....	24
1.2.2	Randwertaufgaben .....	25
1.2.3	Eigenwertaufgaben .....	26
1.3	Ziel weiterer Untersuchungen .....	28
2	Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten .....	29
2.1	Lineare homogene Differentialgleichungen .....	29
2.1.1	Der Exponentialansatz .....	29
2.1.2	Übergang zur reellen Basis .....	33
2.1.3	Definition linearer Eigenwertaufgaben .....	36
2.2	Ansatzmethode zur Herstellung einer partikulären Lösung .....	40
3	Lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten .....	48
3.1	Lineare homogene Differentialgleichungssysteme .....	48
3.1.1	Der Exponentialansatz .....	48
3.1.2	Übergang zur reellen Basis .....	54
3.2	Ansatzmethode zur Herstellung einer partikulären Lösung .....	56
3.3	Variation der Konstanten .....	57
3.3.1	Angabe der Methode .....	58
3.3.2	Anwendung bei linearen Differentialgleichungen .....	60
3.3.3	Delta-Distribution .....	60
4	Eulersche Differentialgleichungen .....	63
5	Nichtlineare Differentialgleichungen .....	68
5.1	Geometrische Veranschaulichung .....	68
5.1.1	Differentialgleichungen erster Ordnung .....	68
5.1.2	Differentialgleichungssysteme .....	71

5.2	Existenz und Unität der Lösungen von Anfangswertaufgaben .....	71
5.2.1	Lösung von Differentialgleichungen erster Ordnung .....	72
5.2.2	Lösung von Differentialgleichungssystemen .....	74
5.2.3	Lösung von Differentialgleichungen $n$ -ter Ordnung .....	74
5.3	Trennung der Veränderlichen .....	75
5.3.1	Differentialgleichungen mit trennbaren Veränderlichen .....	75
5.3.2	Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung mit variablen Koeffizienten .....	79
5.3.3	Ähnlichkeitsdifferentialgleichung .....	81
5.3.4	Bernoulli'sche Differentialgleichung .....	83
5.4	Exakte Differentialgleichungen .....	83
5.4.1	Definition und Lösung .....	83
5.4.2	Integrierender Faktor .....	86
5.5	Differentialgleichungen zweiter Ordnung .....	88
5.5.1	Die Differentialgleichung $y'' = f(x)$ .....	88
5.5.2	Die Differentialgleichung $y'' = f(y)$ , Energiemethode .....	89
5.5.3	Die Differentialgleichung $y'' = f(x, y')$ .....	93
5.5.4	Die Differentialgleichung $y'' = f(y, y')$ .....	94
6	Das Runge-Kutta-Verfahren .....	95
6.1	Aufgabe für numerische Verfahren .....	95
6.2	Ausgangsformel für Näherungsverfahren .....	95
6.3	Herleitung des Runge-Kutta-Verfahrens .....	96
6.4	Gütediskussion .....	97
6.5	Rechenschema .....	99
6.6	Runge-Kutta-Verfahren für Systeme .....	100
7	Potenzreihenansätze und Verallgemeinerungen .....	102
7.1	Potenzreihenentwicklung der Lösung .....	102
7.1.1	Koeffizientenberechnung .....	102
7.1.2	Existenz- und Unitätssatz im allgemeinen Fall .....	109
7.1.3	Existenz- und Unitätssatz im linearen Fall .....	112
7.1.4	Eine Anwendung: Die Legendreschen Funktionen .....	115
7.2	Verallgemeinerte Potenzreihenansätze .....	121
7.2.1	Stellen der Bestimmtheit .....	121
7.2.2	Berechnung eines Basiselementes .....	124
7.2.3	Berechnung eines zweiten Basiselementes .....	128

## 8 Inhalt

8	Rand- und Eigenwertaufgaben .....	130
8.1	Lineare Randwertaufgaben .....	130
8.1.1	Zum Lösungsverhalten; der Alternativsatz .....	130
8.1.2	Halbhomogene Aufgaben und die Greensche Funktion .....	136
8.1.3	Sturmsche Randwertaufgaben .....	142
8.1.4	Numerische Verfahren .....	144
8.2	Lineare Eigenwertaufgaben .....	147
8.2.1	Aufgabenstellung und wichtige Grundbegriffe .....	148
8.2.2	Vergleichsfunktionen und Skalarprodukte .....	151
8.2.3	Hermitesche Differentialoperatoren .....	153
8.2.4	Sturm-Liouvillesche Eigenwertaufgaben .....	156
9	Einführendes über dynamische Systeme .....	165
9.1	Einige Grundbegriffe .....	165
9.2	Autonome Systeme zweiter Ordnung .....	168
	Lösungen der Aufgaben .....	173
	Literatur .....	182
	Sachregister .....	185