

Arnulf Kost

Numerische Methoden in der Berechnung elektromagnetischer Felder

Mit 251 Abbildungen

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York
London Paris Tokyo
Hong Kong Barcelona Budapest

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung	1
1.1 Computergestützte Entwicklung und Konstruktion	1
1.2 Elektromagnetische Felder in der Technik	2
1.3 Numerische Feldberechnung	3
1.4 Einzelne numerische Methoden	3
2 Feldgleichungen	7
2.1 Feldgrößen	7
2.1.1 MAXWELL'sche Gleichungen	7
2.1.2 Stetigkeitsbedingungen	8
2.1.2.1 Elektrisches Feld	8
2.1.2.2 Magnetisches Feld	9
2.1.2.3 Kontinuität des Stroms	9
2.1.3 Randbedingungen	9
2.1.3.1 Elektrisches Feld	10
2.1.3.2 Magnetisches Feld	10
2.2 Potentiale	11
2.2.1 Elektrisches Skalarpotential	11
2.2.1.1 Randbedingungen	12
2.2.2 Magnetisches Vektorpotential	12
2.2.2.1 Eichung	13
2.2.2.2 Randbedingungen	14
2.2.3 Magnetisches Skalarpotential	14
2.2.3.1 Randbedingungen	15
2.2.4 Übergeordnete Potentiale	16
2.3 Problemklassen	16
2.3.1 Statische Probleme	17
2.3.1.1 Magnetostatische Probleme	17
2.3.2 Zeitabhängige Probleme	17
2.3.2.1 Wirbelstrom- und Skineffektprobleme	17
2.3.2.2 Wellenausbreitung	18
2.3.3 Sinusförmige Zeitabhängigkeit	18
2.3.4 Ebene Probleme	19

3 Analytische und analytisch-numerische Verfahren	20
3.1 Analytische Verfahren	21
3.1.1 Beispiel: Leitende Kugel im Wechselfeld einer Kreisschleife	21
3.1.2 Beispiel: Leitendes Rotationsellipsoid im Wechselfeld einer Kreisschleife	23
3.1.3 Beispiel: Leitender elliptischer Zylinder im Wechselfeld	30
3.2 Analytisch-numerische Verfahren	32
3.2.1 Analytisch-numerische Verfahren mit vollständigem Orthogonalsystem	33
3.2.2 Die Mehrfach-Multi-Pol(MMP)-Methode	36
4 Finite Elemente Methode	39
4.1 Statisches Randwertproblem	43
4.1.1 Integrale Formulierung und FEM-Strategie	44
4.1.1.1 Randwertproblem	44
4.1.1.2 Technischer Anwendungsfall	44
4.1.1.3 Strategie eines gewichteten Residuums	45
4.1.1.4 Anwendung des 1. GREEN'schen Satzes	47
4.1.1.5 Randintegral	48
4.1.1.6 Lokales GALERKIN-Verfahren	49
4.1.1.7 Variationsintegral	51
4.1.1.8 Gleichungssystem	52
4.1.2 Geometrie der Elemente	53
4.1.2.1 Querschnitts-Elemente (2D)	53
4.1.2.2 Volumen-Elemente (3D)	54
4.1.2.3 Transformation von Elementen (2D und 3D)	55
4.1.3 Diskretisierung mit linearen Elementen	61
4.1.3.1 Querschnitts-Diskretisierung (2D)	61
4.1.3.2 Lokale Basisfunktionen (2D)	63
4.1.3.3 Lokale Standard-Formfunktionen (2D)	64
4.1.3.4 Dreiecks-Koordinaten	65
4.1.3.5 Volumen-Diskretisierung (3D) mit Tetraederelementen	71
4.1.3.6 Lokale Basisfunktionen (3D)	72
4.1.3.7 Lokale Standard-Formfunktionen (3D)	72
4.1.3.8 Tetraederkoordinaten	73
4.1.3.9 Hierarchische Formfunktionen (1D, 2D, 3D)	78
4.1.4 Diskretisierung mit höheren Elementen	80
4.1.4.1 Polynom-Ansatz	81
4.1.4.2 Ansatz nach SILVESTER	83
4.1.4.3 Hierarchischer Ansatz	86
4.1.4.4 Vereinfachter Ansatz	86
4.1.4.5 Ansätze in 3D-Fällen	87
4.1.4.6 Globale und lokale Koordinaten, Gradientenbildung, Integration	87
4.1.4.7 Zusammenstellung von Standard-Elementen	88

4.1.5	Stetigkeit der Formfunktionen	91
4.1.6	Diskretisierung mit Kantenelementen (edge elements)	95
4.1.6.1	Knoten- und Kantenelemente – wesentliche Merkmale	96
4.1.6.2	Tetraeder-Kantenelemente	96
4.1.6.3	Hexaeder-Kantenelemente	98
4.1.6.4	Stetigkeit	100
4.1.6.5	Singularitäten	100
4.1.6.6	Unechte Eigenmoden	101
4.1.7	Gleichungssystem	101
4.1.7.1	Elementmatrix	101
4.1.7.2	Gesamtmatrix	103
4.1.7.3	Automatische Verarbeitung	105
4.1.7.4	Eingabe der Randbedingungen	106
4.1.7.5	Lösung des Gleichungssystems	107
4.1.7.6	Lösung des Gleichungssystems für nichtlineare Materialien	109
4.1.8	Beispiel Ladungsverteilung (1D)	110
4.1.9	Beispiel vereinfachte Mikrostreifenleitung (2D)	113
4.1.9.1	FEM-Formulierung und Gleichungssystem	113
4.1.9.2	Feldverteilung, Isolationswiderstand	116
4.1.9.3	Analytische Lösung	116
4.1.10	Beispiel Mikrostreifenleitung (3D)	121
4.2	FEM-Formulierungen für weitere elektromagnetische Randwertprobleme	123
4.2.1	Schwache Formen der Differentialgleichungen	123
4.2.1.1	Elektrisches Skalarpotential	123
4.2.1.2	Magnetisches Vektorpotential	126
4.2.1.3	Magnetisches Skalarpotential	128
4.2.2	Anwendungen und Kombinationen	129
4.2.2.1	Elektrostatische Probleme	129
4.2.2.2	Magnetostatische Probleme	129
4.2.2.3	Wirbelstromprobleme	131
4.3	Fehlerabschätzung	134
4.3.1	Diskretisierungsfehler	134
4.3.2	Beschreibung des Fehlers	134
4.3.2.1	Bestimmung des Fehlers durch Abschätzung	135
4.3.3	Feststellung des Fehlers	136
4.3.3.1	Direkte Fehlerindikatoren	136
4.3.3.2	Polynomorientierte Fehlerindikatoren	137
4.3.3.3	Komplementäre Prinzipien	137
4.3.3.4	Methode von BANK und WEISER	137
4.3.4	Auswahl und Prüfung	139
4.3.4.1	Globale Fehlerabschätzung	139
4.3.4.2	Lokale Fehlerangabe	139
4.4	Adaptive Netzgenerierung	140
4.4.1	Konzept	141

XII Inhaltsverzeichnis

4.4.2	Generierung eines Startnetzes	142
4.4.2.1	Netzgenerierung für 2D	142
4.4.2.2	Minimaltriangulierungen	142
4.4.2.3	Netzgenerierung für 3D	145
4.4.3	Adaptive Netzverfeinerung	152
4.4.4	h -Verfeinerung	153
4.4.4.1	Elementunterteilung	153
4.4.4.2	Netzglättung	155
4.4.5	p -Verfeinerung	164
4.4.5.1	Realisierung der p -Adaption	165
4.4.5.2	Kombination mit der h -Verfeinerung	166
4.4.6	Effektivität adaptiver Netzgenerierung	166
4.4.6.1	Approximationsfehler	167
4.4.6.2	Rechenzeitverbrauch	168
4.5	Weitere Beispiele und Resultate	168
4.5.1	Programmpaket 3DFE	169
4.5.1.1	Beispiel Streifenleitung: h - und p -Verfeinerung	170
4.5.1.2	h -Verfeinerung	170
4.5.1.3	p -Verfeinerung	171
4.5.2	Beispiel Switched Reluctance Motor	175
4.5.2.1	Anforderungen an die Feldberechnung	176
4.5.2.2	Berechnung eines gegebenen Motors	176
4.5.3	Beispiel TEAM-Workshop Problem #20	180
4.5.3.1	Problemstellung	180
4.5.3.2	Lösung	181
4.5.3.3	Auswertung	183
4.5.3.4	Ergebnis	187
4.5.4	Beispiel TEAM-Workshop Problem #7	187
4.5.4.1	Problemstellung	187
4.5.4.2	Lösung	188
4.5.4.3	Auswertung	189
4.5.4.4	Ergebnis	189
4.5.5	Beispiel aus der Mikroelektronik: Leitungsdiskontinuität (Via)	191
4.5.5.1	Problemstellung	191
4.5.5.2	Lösung	192
5	Boundary Element Methode	194
5.1	Statisches Randwertproblem	196
5.1.1	Randintegralgleichung und BEM-Strategie	196
5.1.1.1	Randwertproblem	196
5.1.1.2	Technischer Anwendungsfall	197
5.1.1.3	Gewichtetes Residuum und 2. GREEN'scher Satz	199
5.1.1.4	DIRAC-Delta-Funktion	201
5.1.1.5	Randintegralgleichung	203
5.1.1.6	Die beiden Hauptschritte der BEM	204

5.1.1.7	GREEN'sches Äquivalenztheorem	204
5.1.2	Fundamentallösungen	204
5.1.3	Singularitäten	209
5.1.3.1	Glatter Rand	209
5.1.3.2	Rand mit Kante (2D)	212
5.1.3.3	Rand mit Ecke (3D)	215
5.1.4	Diskretisierung	215
5.1.4.1	Rand-Diskretisierung (2D)	215
5.1.4.2	Oberflächen-Diskretisierung (3D)	224
5.1.5	Gleichungssystem und Innenraum-Lösung	229
5.1.5.1	Gleichungssystem für konstante Elemente und Innenraum- Lösung	230
5.1.5.2	Gleichungssystem für höhere Elemente	232
5.1.6	Beispiel Mikrostreifenleiter (2D)	236
5.1.6.1	Aufgabenstellung	236
5.1.6.2	Das feldbeschreibende Randwertproblem	236
5.1.6.3	BEM-Formulierung	238
5.1.6.4	Diskretisierung	239
5.1.6.5	Numerische Auswertung	241
5.1.7	Beispiel Strömungsfeld in anisotroper Kohlebürste (2D)	243
5.1.7.1	Aufgabenstellung	243
5.1.7.2	Zu lösendes Randwertproblem	243
5.1.7.3	BEM-Formulierung	246
5.1.7.4	Diskretisierung	247
5.1.7.5	Numerische Auswertung	251
5.2	Quasistationäres Übergangsproblem	254
5.2.1	Randintegralgleichungen und BEM-Strategie im skalaren 2D- Fall	254
5.2.1.1	Aufgabenstellung und Randwertproblem	254
5.2.1.2	BEM-Formulierung	257
5.2.1.3	Diskretisierung und Gleichungssystem	259
5.2.1.4	Beispiele und numerische Auswertung	262
5.2.2	Randintegralgleichungen und BEM-Strategie im vektoriellen 3D-Fall (Direkte BEM)	263
5.2.2.1	\vec{E}, \vec{H} -Formulierung	267
5.2.2.2	Diskretisierung und Gleichungssystem	271
5.2.2.3	Verbesserte \vec{E}, \vec{H} -Formulierung	276
5.2.2.4	Beispiele und numerische Auswertung	277
5.2.2.5	\vec{A}, φ -Formulierung	280
5.2.2.6	IBC-Formulierung	284
5.2.3	Indirekte BEM-Strategie im vektoriellen 3D-Fall	285
5.2.3.1	\vec{H}, φ -Formulierung	286
5.2.3.2	Diskretisierung und Gleichungssystem	289
5.2.3.3	Berechnung der wirklichen Feldgrößen	290

5.2.3.4	Beispiele zur Abschirmung und Elektromagnetischen Ver- träglichkeit	291
5.3	Streuung elektromagnetischer Wellen	295
5.3.1	Randintegralgleichungen und BEM-Strategie	296
5.3.2	Diskretisierung und Gleichungssystem	298
5.3.3	Beispiele	299
5.3.3.1	Reflexion einer ebenen Welle am leitenden Zylinder	299
5.3.3.2	Drahtantenne vor dielektrischem Körper	303
5.3.3.3	Gewebe-Hyperthermie mittels elektromagnetischer Felder	307
5.4	Integrale	308
5.4.1	Singuläre Integrale der LAPLACE-Gleichung (2D)	310
5.4.1.1	Konstante Elemente	312
5.4.1.2	Lineare Elemente	313
5.4.2	Singuläre Integrale der skalaren HELMHOLTZ-Gleichung (2D)	315
5.4.2.1	Konstante Elemente	316
5.4.2.2	Lineare Elemente	316
5.4.3	Singuläre Integrale der LAPLACE-Gleichung (3D)	317
5.4.3.1	Konstante Elemente	318
5.4.3.2	Lineare Elemente	319
5.4.4	Singuläre Integrale der vekt. HELMHOLTZ-Gleichung (3D)	321
5.4.4.1	Konstante Elemente	321
5.4.4.2	Lineare Elemente	323
5.4.5	Verfahren zur Behandlung von nahezu singulären Integralen	323
5.4.5.1	Verfahren der LOG- L_1 -Transformation für nahezu sin- guläre Konturintegrale	323
5.4.5.2	Verfahren zur Berechnung der nahezu singulären Flächen- integrale	326
5.5	Spezielle Probleme der BEM	326
5.5.1	Mehrere Gebiete	326
5.5.2	Symmetrie	328
5.5.2.1	Physikalische Symmetrie	328
5.5.2.2	Geometrische Symmetrie	333
5.5.3	Anisotropie	334
5.5.4	Kanten und Ecken	334
5.5.4.1	Abrundung von Ecken und Kanten	334
5.5.4.2	Diskontinuierliches Element	335
5.5.4.3	Doppelknoten-Elemente	335
5.5.4.4	Kanten-Probleme bei periodischen Randbedingungen	336
5.5.4.5	Diskontinuierliche Randbedingungen	338
5.5.4.6	Ecken-Probleme	338
5.6	Parallele Berechnung nichtlinearer Wirbelströme	341
5.6.1	Nichtlineare Problemstellung	342
5.6.1.1	Darstellung der Magnetisierungskurve	343
5.6.2	Iterativer Lösungsweg und BEM-Formulierung	343
5.6.3	Beispiele und Ergebnisse	348

5.7 Weitere mit der BEM behandelte Probleme	351
5.7.1 Nichtlineare magnetostatische Probleme	351
5.7.2 Transiente Wirbelströme	351
5.7.3 \vec{T} , Ω -Formulierung	351
5.7.4 Magnetostatische Probleme mit dünnen Plattenmaterialien	352
5.7.5 Felder in Halbleiter-Materialien	352
5.7.6 Adaptive Randnetz-Verfeinerung	352
5.7.7 Kanten-Elemente (edge elements)	352
5.7.8 Besondere Behandlung der Integrale	353
6 Hybride FEM/BEM-Methode	354
6.1 Allgemeine Problemstellung	355
6.2 FEM-Formulierung für den FEM-Bereich	356
6.2.1 Oberflächenintegral der FEM-Formulierung	358
6.2.2 FEM-Formulierung in Matrix-Form	358
6.3 BEM-Formulierung für den BEM-Bereich	359
6.3.1 Auswahl der Randelemente	360
6.3.2 BEM-Formulierung in Matrix-Form	360
6.4 Kopplung des FEM- und BEM-Systems	361
6.4.1 System-Matrix für ein einfaches Beispiel	362
6.4.2 Lösung des Gleichungssystems	364
6.5 Beispiel zur Elektromagnetischen Verträglichkeit	364
6.6 3D-FEM/BEM-Kopplung bei vektoriellen Differentialgleichungen	367
7 Weitere numerische Methoden	371
7.1 Methode der Finiten Differenzen	371
7.1.1 FDM-Diskretisierung und Gleichungssystem	373
7.1.2 FDM-Herleitung aus der Strategie der gewichteten Residuen	376
7.2 FIT-Methode (Finite Integration Theory)	379
7.2.1 Methodik	379
7.2.2 Besondere Eigenschaften	383
7.3 Momentenmethode	384
7.3.1 Prinzip der Methode	385
7.3.2 Basis- und Gewichtsfunktion	386
7.3.3 Beispiel für elementweise definierte Basis- und Gewichtsfunktion (Stromverdrängung)	387
7.3.4 Beispiel für elementweise definierte Basisfunktionen und DIRAC'sche Gewichtsfunktion (Antenne)	390
Literatur	393
Sachverzeichnis	403