

# **Wavelets**

**Theorie und Anwendungen**

**Von Prof. Dr. rer. nat. Alfred Karl Louis**  
**Universität Saarbrücken**

**Prof. Dr. rer. nat. Peter Maaß**  
**Universität Potsdam**

**Dr. rer. nat. Andreas Rieder**  
**Universität Saarbrücken**

**Mit zahlreichen Abbildungen**



**B. G. Teubner Stuttgart 1994**

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>1</b>
<b>Notationen</b>	<b>7</b>
<b>Einführung</b>	<b>11</b>
<b>1 Die kontinuierliche Wavelet–Transformation</b>	<b>15</b>
1.1 Definition und elementare Eigenschaften . . . . .	15
1.2 Affine Operatoren . . . . .	25
1.3 Filtereigenschaften . . . . .	26
1.3.1 Phasenraumdarstellung . . . . .	29
1.4 Approximationseigenschaften . . . . .	33
1.4.1 Asymptotisches Verhalten im Frequenzparameter . . . . .	33
1.4.2 Bemerkungen zur Ordnung von Wavelets . . . . .	40
1.5 Abklingverhalten . . . . .	42
1.6 Gruppentheoretische Grundlagen . . . . .	46
1.6.1 Die Orthogonalitätsrelation für lokalkompakte Gruppen . . . . .	46
1.6.2 Die Links–Transformationen . . . . .	51
1.6.2.1 Die Wavelet–Transformation auf $L^2(\mathbb{R})$ . . . . .	54
1.6.2.2 Die gefensterte Fourier–Transformation . . . . .	57
1.6.2.3 Die Wavelet–Transformation auf $L^2(\mathbb{R}^2)$ . . . . .	58
1.7 Die Wavelet–Transformation auf Sobolev–Räumen . . . . .	69

<b>2 Die diskrete Wavelet–Transformation</b>	<b>79</b>
2.1 Wavelet–Frames . . . . .	79
2.1.1 Einführung und Definition . . . . .	79
2.1.2 Der Frame–Operator . . . . .	99
2.2 Multi–Skalen–Analyse . . . . .	103
2.2.1 Eindimensionale Multi–Skalen–Analyse . . . . .	103
2.2.2 Mehrdimensionale Multi–Skalen–Analyse . . . . .	121
2.3 Schnelle Wavelet–Transformation . . . . .	125
2.4 Orthogonale eindimensionale Wavelets . . . . .	135
2.4.1 Spline–Wavelets . . . . .	137
2.4.2 Lösung von Skalierungsgleichungen . . . . .	139
2.4.3 Orthogonale Wavelets mit kompaktem Träger . . . . .	159
2.4.4 Eigenschaften der Daubechies–Wavelets . . . . .	164
2.4.5 Biorthogonale Wavelets . . . . .	178
2.4.6 Operatorangepaßte Wavelets . . . . .	184
2.4.6.1 Wavelet–Vaguelette–Zerlegungen . . . . .	186
2.4.6.2 Wavelet–Wavelet–Zerlegungen . . . . .	192
2.4.7 Anmerkungen . . . . .	195
2.4.7.1 Wavelets und Ableitungen . . . . .	196
2.4.7.2 Wavelets auf dem Intervall . . . . .	199
2.4.7.3 Coiflets . . . . .	202
2.5 Orthogonale zweidimensionale Wavelets . . . . .	204
2.5.1 Tensor–Wavelets . . . . .	208
2.5.2 Induzierte Wavelets . . . . .	209
2.5.3 Nicht–separable Wavelets für das Quincunx–Gitter . . . . .	211
<b>3 Anwendungen der Wavelet–Transformation</b>	<b>227</b>
3.1 Wavelet–Analyse eindimensionaler Signale . . . . .	227
3.1.1 Vorbereitungen . . . . .	227
3.1.2 EKG–Analyse . . . . .	228
3.2 Qualitätsbeurteilung von Gewebe . . . . .	231
3.2.1 Einführung . . . . .	231
3.2.2 Qualitätsmaße, Anisotropie und Beispiele . . . . .	233

3.3	Datenkompression in der digitalen Bildverarbeitung . . . . .	236
3.4	Regularisierung Inverser Probleme . . . . .	242
3.4.1	Schlecht gestellte Probleme . . . . .	242
3.4.2	Wavelet–Galerkin–Verfahren . . . . .	244
3.4.2.1	Approximation in Sobolev–Räumen . . . . .	245
3.4.2.2	Ein numerisches Beispiel . . . . .	248
3.4.3	Mollifier–Methoden . . . . .	248
3.5	Wavelet–Galerkin–Methoden für Randwertprobleme . . . . .	251
3.5.1	Zwei–Punkt–Randwertprobleme und ihre Diskretisierung durch Galerkin–Methoden . . . . .	251
3.5.2	Wavelet–Galerkin–Methoden für Randwertprobleme . . . . .	254
3.5.2.1	Die Wavelet–Ansatzräume . . . . .	255
3.5.2.2	Das lineare Gleichungssystem . . . . .	262
3.6	Schwarz–Iterationen . . . . .	269
3.6.1	Wavelet–Galerkin–Diskretisierung des Modellproblems . . . . .	269
3.6.2	Eine additive Schwarz–Iteration . . . . .	273
3.6.3	Eine Abschätzung . . . . .	280
3.6.4	Verallgemeinerung der Schwarz–Iteration auf Wavelet–Pakete–Räume . . . . .	284
3.7	Ausblick auf zweidimensionale Randwertprobleme . . . . .	290
3.7.1	Ein Penalisierte– und Einbettungsverfahren . . . . .	290
3.7.2	Numerische Aspekte und Experimente . . . . .	292
<b>Anhang: Fourier–Transformation</b>		<b>297</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>		<b>301</b>
<b>Index</b>		<b>312</b>