

# Wavelets

Theorie und Anwendungen

Von Prof. Dr. rer. nat. Alfred Karl Louis  
Universität Saarbrücken

Prof. Dr. rer. nat. Peter Maaß  
Universität Potsdam

Dr. rer. nat. Andreas Rieder  
Universität Saarbrücken

Mit zahlreichen Abbildungen



B. G. Teubner Stuttgart 1994

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>1</b>
<b>Notationen</b>	<b>7</b>
<b>Einführung</b>	<b>11</b>
<b>1 Die kontinuierliche Wavelet-Transformation</b>	<b>15</b>
1.1 Definition und elementare Eigenschaften . . . . .	15
1.2 Affine Operatoren . . . . .	25
1.3 Filtereigenschaften . . . . .	26
1.3.1 Phasenraumdarstellung . . . . .	29
1.4 Approximationseigenschaften . . . . .	33
1.4.1 Asymptotisches Verhalten im Frequenzparameter . . . . .	33
1.4.2 Bemerkungen zur Ordnung von Wavelets . . . . .	40
1.5 Abklingverhalten . . . . .	42
1.6 Gruppentheoretische Grundlagen . . . . .	46
1.6.1 Die Orthogonalitätsrelation für lokalkompakte Gruppen . . . . .	46
1.6.2 Die Links-Transformationen . . . . .	51
1.6.2.1 Die Wavelet-Transformation auf $L^2(\mathbb{R})$ . . . . .	54
1.6.2.2 Die gefensterte Fourier-Transformation . . . . .	57
1.6.2.3 Die Wavelet-Transformation auf $L^2(\mathbb{R}^2)$ . . . . .	58
1.7 Die Wavelet-Transformation auf Sobolev-Räumen . . . . .	69

<b>2 Die diskrete Wavelet-Transformation</b>	<b>79</b>
2.1 Wavelet-Frames . . . . .	79
2.1.1 Einführung und Definition . . . . .	79
2.1.2 Der Frame-Operator . . . . .	99
2.2 Multi-Skalen-Analyse . . . . .	103
2.2.1 Eindimensionale Multi-Skalen-Analyse . . . . .	103
2.2.2 Mehrdimensionale Multi-Skalen-Analyse . . . . .	121
2.3 Schnelle Wavelet-Transformation . . . . .	125
2.4 Orthogonale eindimensionale Wavelets . . . . .	135
2.4.1 Spline-Wavelets . . . . .	137
2.4.2 Lösung von Skalierungsgleichungen . . . . .	139
2.4.3 Orthogonale Wavelets mit kompaktem Träger . . . . .	159
2.4.4 Eigenschaften der Daubechies-Wavelets . . . . .	164
2.4.5 Biorthogonale Wavelets . . . . .	178
2.4.6 Operatorangepaßte Wavelets . . . . .	184
2.4.6.1 Wavelet-Vaguelette-Zerlegungen . . . . .	186
2.4.6.2 Wavelet-Wavelet-Zerlegungen . . . . .	192
2.4.7 Anmerkungen . . . . .	195
2.4.7.1 Wavelets und Ableitungen . . . . .	196
2.4.7.2 Wavelets auf dem Intervall . . . . .	199
2.4.7.3 Coiflets . . . . .	202
2.5 Orthogonale zweidimensionale Wavelets . . . . .	204
2.5.1 Tensor-Wavelets . . . . .	208
2.5.2 Induzierte Wavelets . . . . .	209
2.5.3 Nicht-separable Wavelets für das Quincunx-Gitter . . . . .	211
<b>3 Anwendungen der Wavelet-Transformation</b>	<b>227</b>
3.1 Wavelet-Analyse eindimensionaler Signale . . . . .	227
3.1.1 Vorbereitungen . . . . .	227
3.1.2 EKG-Analyse . . . . .	228
3.2 Qualitätsbeurteilung von Gewebe . . . . .	231
3.2.1 Einführung . . . . .	231
3.2.2 Qualitätsmaße, Anisotropie und Beispiele . . . . .	233

3.3	Datenkompression in der digitalen Bildverarbeitung . . . . .	236
3.4	Regularisierung Inverser Probleme . . . . .	242
3.4.1	Schlecht gestellte Probleme . . . . .	242
3.4.2	Wavelet-Galerkin-Verfahren . . . . .	244
3.4.2.1	Approximation in Sobolev-Räumen . . . . .	245
3.4.2.2	Ein numerisches Beispiel . . . . .	248
3.4.3	Mollifier-Methoden . . . . .	248
3.5	Wavelet-Galerkin-Methoden für Randwertprobleme . . . . .	251
3.5.1	Zwei-Punkt-Randwertprobleme und ihre Diskretisierung durch Galerkin-Methoden . . . . .	251
3.5.2	Wavelet-Galerkin-Methoden für Randwertprobleme . . . . .	254
3.5.2.1	Die Wavelet-Ansatzräume . . . . .	255
3.5.2.2	Das lineare Gleichungssystem . . . . .	262
3.6	Schwarz-Iterationen . . . . .	269
3.6.1	Wavelet-Galerkin-Diskretisierung des Modellproblems . . . . .	269
3.6.2	Eine additive Schwarz-Iteration . . . . .	273
3.6.3	Eine Abschätzung . . . . .	280
3.6.4	Verallgemeinerung der Schwarz-Iteration auf Wavelet-Pakete- Räume . . . . .	284
3.7	Ausblick auf zweidimensionale Randwertprobleme . . . . .	290
3.7.1	Ein Penalisierungs- und Einbettungsverfahren . . . . .	290
3.7.2	Numerische Aspekte und Experimente . . . . .	292
<b>Anhang: Fourier-Transformation</b>		<b>297</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>		<b>301</b>
<b>Index</b>		<b>312</b>