

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	IX
Vorwort zur deutschen Ausgabe	X
I. Die Mathematik im Zusammenhang der kulturhistorischen Entwicklung	
1) Die ältesten Kulturen: Mesopotamien und Ägypten	1
2) Griechenland	7
3) Die arabische Kultur des frühen Mittelalters	11
4) Das frühe Mittelalter im christlichen Abendland	16
5) Die ersten Einflüsse der arabischen Mathematik	17
6) Die Allmacht der Kirche	18
7) Die großen Übersetzungen des 12. Jahrhunderts	19
8) Leonardo von Pisa (um 1170 – nach 1240)	20
9) Das Zeitalter der Scholastik	21
10) Das 15. Jahrhundert und die neuen Ziele der Wissenschaft	24
11) Die Ausbreitung der neuen Ideen: Die Erfindung des Buchdrucks im 15. Jahrhundert	25
12) Fortschritte in Arithmetik und Algebra	26
13) Die Reform der Astronomie: Nikolaus Kopernikus (1473–1543)	27
14) Die Keplerschen Gesetze und Galileo Galilei	28
15) Die Mathematisierung der Wissenschaft im 17. Jahrhundert	29
16) Das wissenschaftliche Leben im 17. Jahrhundert: Einrichtung und Rolle der Akademien der Wissenschaften	30
17) Das mathematische 18. Jahrhundert	31
18) Die Vorherrschaft der französischen Mathematik während der Revolution	33
19) Die neuen Bedingungen der mathematischen Arbeit im 19. Jahrhundert	34
II. Ein Moment der Rationalität: Griechenland	37
1) Die Entstehung des abstrakten Denkens bei den milesischen Naturphilosophen	37
2) Die ionische Mathematik: Thales	39
3) Die Arithmetik der pythagoräischen Schule	40
4) Die Reaktion: Die Eleaten	44
5) Die Sophisten	44
6) Die Akademie Platons	45
7) Aristoteles und das Lyzeum	48
8) Die <i>Elemente</i> des Euklid	49
9) Apollonios und die Kegelschnitte	58
10) Die Schule von Alexandria	62

III. Die Entstehung der klassischen Algebra	67
1) Lineare und quadratische Gleichungen in den frühen Kulturen	67
2) Die <i>geometrische Algebra</i> bei Euklid	71
3) Die <i>Arithmetik</i> des Diophant	72
4) Die arabische Mathematik	79
5) Al-Ḫwārizmī und die Geburt des al-ğabr	80
6) Abū Kāmil: der erste Schüler	82
7) Die algebraisch-arithmetische Schule des al-Karāğı	84
8) Die algebraisch-geometrische Schule und die Lösung der kubischen Gleichung	89
9) Numerische Lösungen und Approximationsverfahren von at-Tüsī bis zu al-Kāṣī	93
10) Der Zahlbegriff	98
11) Die deutsche <i>Cof</i> ß	101
12) Die italienischen Renaissancealgebraiker	103
13) Der algebraische Symbolismus	107
14) Die Emanzipation der Algebra gegenüber der Geometrie	109
15) Fermat und die Wiedergeburt der Zahlentheorie	110
16) Die algebraische Auflösung von Gleichungen: Leerlauf und Fortschritte	113
17) Abel: Die Gleichung fünften Grades	118
Anhang zu Kapitel III: Konstruktionen mit Zirkel und Linjal	119
IV. Figuren, Räume und Geometrien	121
1) Anfänge in der Praxis	121
2) Beweisende Geometrie in Griechenland	123
3) Die Beiträge der Araber	126
4) Die Perspektive und die Entstehung der projektiven Geometrie	129
5) Die analytische Geometrie und das Studium von Kurven im 18. Jahrhundert	137
6) Die darstellende Geometrie: Gaspard Monge	139
7) Der <i>Traité</i> von Poncelet: Synthese und Manifest der projektiven Geometrie	141
8) Geometrische Transformationen	148
9) Die projektiven Koordinaten des Christian von Staudt	151
10) Analytische Formulierungen	153
11) Die nichteuklidischen Geometrien	155
12) Projektive Interpretation der metrischen Begriffe	164
13) Die projektive Natur der euklidischen Geometrie	165
14) Die Synthese: Das Erlanger Programm	168
15) Gesprengter Rahmen	172

V. Der Grenzwert: Vom Undenkbaren zum Begriff	175
1) Zahlen und geometrische Größen	175
2) Die Auffassung des Unendlichen in der griechischen Mathematik: Die Paradoxien des Zenon	175
3) Die Exhaustionsmethode: Negation des Unendlichen	177
4) Wiederaufnahme durch die Araber	182
5) Das Mittelalter	184
6) Die Befreiung: Stevin und Valerio	185
7) Die infinitesimalen Betrachtungen bei J. Kepler	185
8) Die Indivisibelnmethode	186
9) Die Entfaltung der infinitesimalen Methoden im 17. Jahrhundert	189
10) Die Entstehung der Infinitesimalrechnung	201
11) Flucht nach vorne	211
12) Grundlegungsversuche	212
13) Die Klärung der Grundbegriffe	218
14) Eine erste Integrationstheorie	219
15) Die Weierstraßsche Strenge	221
16) Die Konstruktion der reellen Zahlen	221
VI. Der Funktionsbegriff und die Entwicklung der Analysis	227
1) Das Zeitalter der Antike	227
2) Die Schulen von Oxford und Paris	228
3) Vom Studium der Bewegungen zur Untersuchung der Bewegungsbahnen	230
4) Das Beispiel der Logarithmusfunktion	231
5) Descartes: geometrische Kurven und algebraische Funktionen	234
6) Die unendlichen Algorithmen	235
7) Ein neuer mathematischer Gegenstand: das Gesetz der Veränderung	236
8) Die algebraische Analysis des 18. Jahrhunderts	238
9) Das Phänomen der mehrwertigen Funktionen	239
10) Die <i>Introductio in analysin infinitorum</i> von Euler	241
11) Die Gleichung der schwingenden Saite	244
12) Die Funktion als zentraler Gegenstand der Analysis	245
13) Das Ringen um die Grundbegriffe	247
14) Die Entwicklung von Funktionen in trigonometrische Reihen	248
15) Der Begriff der willkürlichen Funktion und seine Folgen	253
16) Die Reihendarstellung stetiger Funktionen und die gleichmäßige Konvergenz	254
17) Die Funktionentheorie	254
18) Die Anfänge der Mengenlehre und der allgemeinen Topologie	260
19) Die unstetigen Funktionen. Kontroversen um den Funktionsbegriff	265
20) Der maßtheoretische Gesichtspunkt	267

VII. Im Schnittpunkt von Algebra, Analysis und Geometrie — die komplexen Zahlen	271
1) Der Fundamentalsatz der Algebra	271
2) Wie man mit dem Symbol $\sqrt{-1}$ im 17. und 18. Jahrhundert umging ..	276
3) Die geometrische Darstellung der komplexen Zahlen	277
4) Geometrischer Realismus versus algebraisch-symbolischer Formalismus	279
5) Der wirkliche Begründer der komplexen Zahlen	281
6) Die arithmetische Sichtweise Hamiltons	282
7) Die Kongruenzen und der algebraische Standpunkt Cauchys	285
VIII. Neue Objekte, neue Gesetze und die Entstehung der algebraischen Strukturen	287
1) Die <i>Disquisitiones arithmeticae</i> von Gauß	287
2) Permutationsgruppen und Galois-Theorie	295
3) Die englische Algebraikerschule	305
4) Lineare Strukturen	308
5) Die Entstehung der Gruppentheorie	315
6) Die deutsche Schule und die Anfänge der kommutativen Algebra	318
7) Das neue Gesicht der Mathematik	324
Anhang	
Bibliographie	329
Abbildungsnachweis	335
Personenverzeichnis mit Kurzbiographien	336
Sachverzeichnis mit Glossar	348