

Inhalt

Vektoranalysis (F. Wille)

1 Kurven

1.1 Wege, Kurven, Bogenlängen	1
1.1.1 Einführung: Ebene Kurven	1
1.1.2 Kurven im \mathbb{R}^n	6
1.1.3 Glatte und stückweise glatte Kurven	10
1.1.4 Bogenlänge	13
1.1.5 Parametertransformation, Orientierung	19
1.2 Theorie ebener Kurven	24
1.2.1 Bogenlänge und umschlossene Fläche	24
1.2.2 Krümmung und Krümmungsradius	28
1.2.3 Tangenteneinheitsvektor, Normalenvektor, natürliche Gleichung	33
1.2.4 Evolute und Evolvente	36
1.3 Beispiele ebener Kurven I: Kegelschnitte	40
1.3.1 Kreis	40
1.3.2 Ellipse	45
1.3.3 Hyperbel	50
1.3.4 Parabel	54
1.3.5 Allgemeine Kegelschnittgleichung, Hauptachsentransformation	60
1.4 Beispiele ebener Kurven II: Rollkurven, Blätter, Spiralen	66
1.4.1 Zykloiden	66
1.4.2 Epizykloiden	68
1.4.3 Anwendung: Wankelmotor	73
1.4.4 Hypozykloide	76
1.4.5 Blattartige Kurven	80
1.4.6 Kurbelgetriebe	85
1.4.7 Spiralen	86
1.5 Theorie räumlicher Kurven	92
1.5.1 Krümmung, Torsion und begleitendes Dreibein	92
1.5.2 Berechnung von Krümmung, Torsion und Dreibein in beliebiger Parameterdarstellung	96
1.5.3 Natürliche Gleichungen und Frenétsche Formeln	101

1.6 Vektorfelder, Potentiale, Kurvenintegrale	104
1.6.1 Vektorfelder und Skalarfelder	104
1.6.2 Kurvenintegrale	107
1.6.3 Der Kurvenhauptsatz	112
1.6.4 Potentialkriterium	116
1.6.5 Berechnung von Potentialen	121
1.6.6 Beweis des Potentialkriteriums	126

2 Flächen und Flächenintegrale

2.1 Flächenstücke und Flächen	130
2.1.1 Flächenstücke	130
2.1.2 Tangentialebenen, Normalenvektoren	134
2.1.3 Parametertransformation, Orientierung	137
2.1.4 Flächen	141
2.2 Flächenintegrale	142
2.2.1 Flächeninhalt	142
2.2.2 Flächenintegrale erster und zweiter Art	146
2.2.3 Transformationsformel für Flächenintegrale zweiter Art	151

3 Integralsätze

3.1 Der Gaußsche Integralsatz	154
3.1.1 Ergiebigkeit, Divergenz	155
3.1.2 Der Gaußsche Integralsatz für Bereiche mit stückweise glattem Rand	160
3.1.3 Die Kettenregel der Divergenz	163
3.1.4 Beweis des Gaußschen Integralsatzes für Bereiche mit stückweise glattem Rand	165
3.1.5 Gaußscher und Greenscher Integralsatz in der Ebene	169
3.1.6 Der Gaußsche Integralsatz für Skalarfelder	173
3.2 Der Stokessche Integralsatz	175
3.2.1 Einfache Flächenstücke	176
3.2.2 Zirkulation, Wirbelstärke, Rotation	177
3.2.3 Idee des Stokesschen Integralsatzes	183
3.2.4 Stokesscher Integralsatz im dreidimensionalen Raum	184
3.2.5 Zirkulation und Stokesscher Satz in der Ebene	188
3.3 Weitere Differential- und Integralformeln	190
3.3.1 Nabla-Operator	191
3.3.2 Formeln über Zusammensetzungen mit grad, div und rot	192

3.3.3	Gaußscher und Stokesscher Satz in div-, grad-, rot- und Nabla-Form	193
3.3.4	Partielle Integration	196
3.3.5	Die beiden Greenschen Integralformeln	198
3.3.6	Krummlinige orthogonale Koordinaten	199
3.3.7	Die Differentialoperatoren grad, div, rot, Δ in krummlinigen orthogonalen Koordinaten	204
3.4	Wirbelfreiheit, Quellfreiheit, Potentiale	208
3.4.1	Wirbelfreiheit: $\operatorname{rot} V = 0$, skalare Potentiale	208
3.4.2	Laplace-Gleichung, harmonische Funktionen	210
3.4.3	Poissongleichung	213
3.4.4	Quellenfreiheit: $\operatorname{div} V = 0$, Vektorpotentiale	215
3.4.5	Quellfreie Vektorpotentiale	220
3.4.6	Helmholtzscher Zerlegungssatz	222
4	Alternierende Differentialformen	
4.1	Alternierende Differentialformen im \mathbb{R}^3	225
4.1.1	Integralsätze in Komponentenschreibweise	225
4.1.2	Differentialformen und totale Differentiale	228
4.1.3	Rechenregeln für Differentialformen	230
4.1.4	Integration von Differentialformen, Integralsätze	235
4.2	Alternierende Differentialformen im \mathbb{R}^n	236
4.2.1	Definition, Rechenregeln	237
4.2.2	Integrale über p-dimensionalen Flächen	238
4.2.3	Transformationsformel für Integrale	240
4.2.4	Der allgemeine Stokessche Satz	241
5	Kartesische Tensoren	
5.1	Tensoralgebra	243
5.1.1	Motivation: Spannungstensor	243
5.1.2	Definition kartesischer Tensoren	245
5.1.3	Rechenregeln für Tensoren	251
5.1.4	Invariante Tensoren	255
5.1.5	Diagonalisierung symmetrischer Tensoren und das Tensorellipsoid	258
5.2	Tensoranalysis	261
5.2.1	Differenzierbare Tensorfelder, Fundamentalsatz der Feldtheorie	261

5.2.2	Zusammenhang zwischen Tensorgradienten und grad, div, rot, Δ	264
5.2.3	Der Gaußsche Satz für Tensorfelder zweiter Stufe	266
5.2.4	Anwendungen	267

Funktionentheorie (H. Haf)

6 Grundlagen

6.1 Komplexe Zahlen	274
6.1.1 Wiederholung und Ergänzung	274
6.1.2 Die Riemannsche Zahlenkugel	280
6.1.3 Topologische Hilfsmittel	281
6.1.4 Folgen von komplexen Zahlen	281
6.1.5 Reihen von komplexen Zahlen	288
6.1.6 Kurven und Gebiete in \mathbb{C}	290
6.2 Funktionen einer komplexen Variablen	298
6.2.1 Funktionsbegriff	298
6.2.2 Stetigkeit	300
6.2.3 Elementare Funktionen	303

7 Holomorphe Funktionen

7.1 Differenzierbarkeit im Komplexen, Holomorphie	311
7.1.1 Ableitungsbegriff, Holomorphie	311
7.1.2 Rechenregeln für holomorphe Funktionen	314
7.1.3 Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen	315
7.1.4 Umkehrung der elementaren Funktionen	323
7.1.5 Die Potentialgleichung	330
7.2 Komplexe Integration	336
7.2.1 Integralbegriff	336
7.2.2 Der Cauchysche Integralsatz	343
7.2.3 Folgerungen aus dem Cauchyschen Integralsatz	345
7.2.4 Umkehrung des Cauchyschen Integralsatzes	359
7.2.5 Abwendungen der komplexen Integralrechnung	360
7.3 Erzeugung holomorpher Funktionen durch Grenzprozesse . . .	375
7.3.1 Folgen von Funktionen	375
7.3.2 Reihen von Funktionen	379
7.3.3 Potenzreihen	381

X Inhalt

7.3.4	Charakterisierung holomorpher Funktionen	387
7.3.5	Analytische Fortsetzung	387
7.4	Asymptotische Abschätzungen	400
7.4.1	Asymptotische Entwicklungen	400
7.4.2	Die Sattelpunktmethode	405

8 Isolierte Singularitäten, Laurententwicklung

8.1	Laurentreihen	414
8.1.1	Holomorphe Funktionen in Ringgebieten	414
8.1.2	Singularitäten	420
8.2	Residuensatz und Anwendungen	426
8.2.1	Der Residuensatz	426
8.2.2	Das Prinzip vom Argument	430
8.2.3	Anwendungen: (a) Berechnung von reellen uneigentlichen Integralen	433
	(b) Die Eulersche Gammafunktion	442

9 Konforme Abbildungen

9.1	Einführung in die Theorie konformer Abbildungen	453
9.1.1	Geometrische Kennzeichnung holomorpher Funktionen	453
9.1.2	Der Riemannsche Abbildungssatz	457
9.1.3	Spezielle konforme Abbildungen	460
9.2	Anwendungen auf die Potentialtheorie	485
9.2.1	Dirichletsche Randwertprobleme	485
9.2.2	Neumannsche Randwertprobleme	489
9.2.3	Potential von Punktladungen	492
9.2.4	Ebene stationäre Strömungen	497

10 Anwendungen der Funktionentheorie auf die Besselsche Differentialgleichung

10.1	Die Besselsche Differentialgleichung	508
10.1.1	Motivierung	508
10.1.2	Die Hankelschen Funktionen	510
10.1.3	Allgemeine Lösung der Besselschen Differentialgleichung	515

10.2 Die Besselschen und Neumannschen Funktionen	517
10.2.1 Definitionen und grundlegende Eigenschaften	517
10.2.2 Integraldarstellungen der Besselschen Funktionen	521
10.2.3 Reihenentwicklung und asymptotisches Verhalten der Besselschen Funktionen	523
10.2.4 Orthogonalität und Nullstellen der Besselschen Funktio- nen	527
10.2.5 Die Neumannschen Funktionen	531
10.2.6 Verhalten der Lösung der Besselschen Differentialgleich- ung	535
10.3 Anwendungen	535
10.3.1 Radialsymmetrische Lösungen der Schwingungsgleichung	535
10.3.2 Schwingungen einer Membran	538
Anhang	545
Lösungen zu den Übungen ¹⁾	548
Symbole	567
Literatur	570
Sachverzeichnis	577

¹⁾ Zu den mit * versehenen Übungen werden Lösungen angegeben oder Lösungswege skizziert