

# Inhalt

## Vektoranalysis (F. Wille)

### 1 Kurven

<b>1.1 Wege, Kurven, Bogenlängen</b>	1
1.1.1 Einführung: Ebene Kurven	1
1.1.2 Kurven im $\mathbb{R}^n$	6
1.1.3 Glatte und stückweise glatte Kurven	10
1.1.4 Bogenlänge	13
1.1.5 Parametertransformation, Orientierung	19
<b>1.2 Theorie ebener Kurven</b>	24
1.2.1 Bogenlänge und umschlossene Fläche	24
1.2.2 Krümmung und Krümmungsradius	28
1.2.3 Tangenteneinheitsvektor, Normalenvektor, natürliche Gleichung	33
1.2.4 Evolute und Evolvente	36
<b>1.3 Beispiele ebener Kurven I: Kegelschnitte</b>	40
1.3.1 Kreis	40
1.3.2 Ellipse	45
1.3.3 Hyperbel	50
1.3.4 Parabel	54
1.3.5 Allgemeine Kegelschnittgleichung, Hauptachsentransformation	60
<b>1.4 Beispiele ebener Kurven II: Rollkurven, Blätter, Spiralen</b>	66
1.4.1 Zykloiden	66
1.4.2 Epizykloiden	68
1.4.3 Anwendung: Wankelmotor	73
1.4.4 Hypozykloide	76
1.4.5 Blattartige Kurven	80
1.4.6 Kurbelgetriebe	85
1.4.7 Spiralen	86
<b>1.5 Theorie räumlicher Kurven</b>	92
1.5.1 Krümmung, Torsion und begleitendes Dreibein	92
1.5.2 Berechnung von Krümmung, Torsion und Dreibein in beliebiger Parameterdarstellung	96
1.5.3 Natürliche Gleichungen und Frenétsche Formeln	101

<b>1.6 Vektorfelder, Potentiale, Kurvenintegrale</b> . . . . .	104
1.6.1 Vektorfelder und Skalarfelder . . . . .	104
1.6.2 Kurvenintegrale . . . . .	107
1.6.3 Der Kurvenhauptsatz . . . . .	112
1.6.4 Potentialkriterium . . . . .	116
1.6.5 Berechnung von Potentialen . . . . .	121
1.6.6 Beweis des Potentialkriteriums . . . . .	126

## 2 Flächen und Flächenintegrale

<b>2.1 Flächenstücke und Flächen</b> . . . . .	130
2.1.1 Flächenstücke . . . . .	130
2.1.2 Tangentialebenen, Normalenvektoren . . . . .	134
2.1.3 Parametertransformation, Orientierung . . . . .	137
2.1.4 Flächen . . . . .	141
<b>2.2 Flächenintegrale</b> . . . . .	142
2.2.1 Flächeninhalt . . . . .	142
2.2.2 Flächenintegrale erster und zweiter Art . . . . .	146
2.2.3 Transformationsformel für Flächenintegrale zweiter Art	151

## 3 Integralsätze

<b>3.1 Der Gaußsche Integralsatz</b> . . . . .	154
3.1.1 Ergiebigkeit, Divergenz . . . . .	155
3.1.2 Der Gaußsche Integralsatz für Bereiche mit stückweise glattem Rand . . . . .	160
3.1.3 Die Kettenregel der Divergenz . . . . .	163
3.1.4 Beweis des Gaußschen Integralsatzes für Bereiche mit stückweise glattem Rand . . . . .	165
3.1.5 Gaußscher und Greenscher Integralsatz in der Ebene . . . . .	169
3.1.6 Der Gaußsche Integralsatz für Skalarfelder . . . . .	173
<b>3.2 Der Stokessche Integralsatz</b> . . . . .	175
3.2.1 Einfache Flächenstücke . . . . .	176
3.2.2 Zirkulation, Wirbelstärke, Rotation . . . . .	177
3.2.3 Idee des Stokesschen Integralsatzes . . . . .	183
3.2.4 Stokesscher Integralsatz im dreidimensionalen Raum . . . . .	184
3.2.5 Zirkulation und Stokesscher Satz in der Ebene . . . . .	188
<b>3.3 Weitere Differential- und Integralformeln</b> . . . . .	190
3.3.1 Nabla-Operator . . . . .	191
3.3.2 Formeln über Zusammensetzungen mit grad, div und rot	192

## VIII Inhalt

3.3.3	Gaußscher und Stokesscher Satz in div-, grad-, rot- und Nabla-Form . . . . .	193
3.3.4	Partielle Integration . . . . .	196
3.3.5	Die beiden Greenschen Integralformeln . . . . .	198
3.3.6	Krummlinige orthogonale Koordinaten . . . . .	199
3.3.7	Die Differentialoperatoren grad, div, rot, $\Delta$ in krummlinigen orthogonalen Koordinaten . . . . .	204
<b>3.4</b>	<b>Wirbelfreiheit, Quellfreiheit, Potentiale</b> . . . . .	208
3.4.1	Wirbelfreiheit: $\text{rot } V=0$ , skalare Potentiale . . . . .	208
3.4.2	Laplace-Gleichung, harmonische Funktionen . . . . .	210
3.4.3	Poisson-Gleichung . . . . .	213
3.4.4	Quellenfreiheit: $\text{div } V=0$ , Vektorpotentiale . . . . .	215
3.4.5	Quellfreie Vektorpotentiale . . . . .	220
3.4.6	Helmholtzscher Zerlegungssatz . . . . .	222

## 4 Alternierende Differentialformen

<b>4.1</b>	<b>Alternierende Differentialformen im <math>\mathbb{R}^3</math></b> . . . . .	225
4.1.1	Integralsätze in Komponentenschreibweise . . . . .	225
4.1.2	Differentialformen und totale Differentiale . . . . .	228
4.1.3	Rechenregeln für Differentialformen . . . . .	230
4.1.4	Integration von Differentialformen, Integralsätze . . . . .	235
<b>4.2</b>	<b>Alternierende Differentialformen im <math>\mathbb{R}^n</math></b> . . . . .	236
4.2.1	Definition, Rechenregeln . . . . .	237
4.2.2	Integrale über $p$ -dimensionalen Flächen . . . . .	238
4.2.3	Transformationsformel für Integrale . . . . .	240
4.2.4	Der allgemeine Stokessche Satz . . . . .	241

## 5 Kartesische Tensoren

<b>5.1</b>	<b>Tensoralgebra</b> . . . . .	243
5.1.1	Motivation: Spannungstensor . . . . .	243
5.1.2	Definition kartesischer Tensoren . . . . .	245
5.1.3	Rechenregeln für Tensoren . . . . .	251
5.1.4	Invariante Tensoren . . . . .	255
5.1.5	Diagonalisierung symmetrischer Tensoren und das Tensorellipsoid . . . . .	258
<b>5.2</b>	<b>Tensoranalysis</b> . . . . .	261
5.2.1	Differenzierbare Tensorfelder, Fundamentalsatz der Feldtheorie . . . . .	261

5.2.2	Zusammenhang zwischen Tensorgradienten und grad, div, rot, $\Delta$ . . . . .	264
5.2.3	Der Gaußsche Satz für Tensorfelder zweiter Stufe . . . . .	266
5.2.4	Anwendungen . . . . .	267

## Funktionentheorie (H. Haf)

### 6 Grundlagen

6.1	<b>Komplexe Zahlen</b> . . . . .	274
6.1.1	Wiederholung und Ergänzung . . . . .	274
6.1.2	Die Riemannsche Zahlenkugel . . . . .	280
6.1.3	Topologische Hilfsmittel . . . . .	281
6.1.4	Folgen von komplexen Zahlen . . . . .	281
6.1.5	Reihen von komplexen Zahlen . . . . .	288
6.1.6	Kurven und Gebiete in $\mathbb{C}$ . . . . .	290
6.2	<b>Funktionen einer komplexen Variablen</b> . . . . .	298
6.2.1	Funktionsbegriff . . . . .	298
6.2.2	Stetigkeit . . . . .	300
6.2.3	Elementare Funktionen . . . . .	303

### 7 Holomorphe Funktionen

7.1	<b>Differenzierbarkeit im Komplexen, Holomorphie</b> . . . . .	311
7.1.1	Ableitungsbegriff, Holomorphie . . . . .	311
7.1.2	Rechenregeln für holomorphe Funktionen . . . . .	314
7.1.3	Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen . . . . .	315
7.1.4	Umkehrung der elementaren Funktionen . . . . .	323
7.1.5	Die Potentialgleichung . . . . .	330
7.2	<b>Komplexe Integration</b> . . . . .	336
7.2.1	Integralbegriff . . . . .	336
7.2.2	Der Cauchysche Integralsatz . . . . .	343
7.2.3	Folgerungen aus dem Cauchyschen Integralsatz . . . . .	345
7.2.4	Umkehrung des Cauchyschen Integralsatzes . . . . .	359
7.2.5	Abwendungen der komplexen Integralrechnung . . . . .	360
7.3	<b>Erzeugung holomorpher Funktionen durch Grenzprozesse</b> . . . . .	375
7.3.1	Folgen von Funktionen . . . . .	375
7.3.2	Reihen von Funktionen . . . . .	379
7.3.3	Potenzreihen . . . . .	381

## X Inhalt

7.3.4	Charakterisierung holomorpher Funktionen . . . . .	387
7.3.5	Analytische Fortsetzung . . . . .	387
<b>7.4</b>	<b>Asymptotische Abschätzungen</b> . . . . .	400
7.4.1	Asymptotische Entwicklungen . . . . .	400
7.4.2	Die Sattelpunktmethode . . . . .	405
<b>8</b>	<b>Isolierte Singularitäten, Laurententwicklung</b>	
<b>8.1</b>	<b>Laurentreihen</b> . . . . .	414
8.1.1	Holomorphe Funktionen in Ringgebieten . . . . .	414
8.1.2	Singularitäten . . . . .	420
<b>8.2</b>	<b>Residuensatz und Anwendungen</b> . . . . .	426
8.2.1	Der Residuensatz . . . . .	426
8.2.2	Das Prinzip vom Argument . . . . .	430
8.2.3	Anwendungen: (a) Berechnung von reellen uneigentlichen Integralen . . . . .	433
	(b) Die Eulersche Gammafunktion . . . . .	442
<b>9</b>	<b>Konforme Abbildungen</b>	
<b>9.1</b>	<b>Einführung in die Theorie konformer Abbildungen</b> . . . . .	453
9.1.1	Geometrische Kennzeichnung holomorpher Funktionen	453
9.1.2	Der Riemannsche Abbildungssatz . . . . .	457
9.1.3	Spezielle konforme Abbildungen . . . . .	460
<b>9.2</b>	<b>Anwendungen auf die Potentialtheorie</b> . . . . .	485
9.2.1	Dirichletsche Randwertprobleme . . . . .	485
9.2.2	Neumannsche Randwertprobleme . . . . .	489
9.2.3	Potential von Punktladungen . . . . .	492
9.2.4	Ebene stationäre Strömungen . . . . .	497
<b>10</b>	<b>Anwendungen der Funktionentheorie auf die Besselsche Differentialgleichung</b>	
<b>10.1</b>	<b>Die Besselsche Differentialgleichung</b> . . . . .	508
10.1.1	Motivierung . . . . .	508
10.1.2	Die Hankelschen Funktionen . . . . .	510
10.1.3	Allgemeine Lösung der Besselschen Differentialgleichung . . . . .	515

<b>10.2 Die Besselschen und Neumannschen Funktionen</b> . . . . .	517
10.2.1 Definitionen und grundlegende Eigenschaften . . . . .	517
10.2.2 Integraldarstellungen der Besselschen Funktionen . . . . .	521
10.2.3 Reihenentwicklung und asymptotisches Verhalten der Besselschen Funktionen . . . . .	523
10.2.4 Orthogonalität und Nullstellen der Besselschen Funktionen . . . . .	527
10.2.5 Die Neumannschen Funktionen . . . . .	531
10.2.6 Verhalten der Lösung der Besselschen Differentialgleichung . . . . .	535
<b>10.3 Anwendungen</b> . . . . .	535
10.3.1 Radialsymmetrische Lösungen der Schwingungsgleichung . . . . .	535
10.3.2 Schwingungen einer Membran . . . . .	538
<b>Anhang</b> . . . . .	545
<b>Lösungen zu den Übungen<sup>1)</sup></b> . . . . .	548
<b>Symbole</b> . . . . .	567
<b>Literatur</b> . . . . .	570
<b>Sachverzeichnis</b> . . . . .	577

---

<sup>1)</sup> Zu den mit \* versehenen Übungen werden Lösungen angegeben oder Lösungswege skizziert