

Inhaltsverzeichnis

1	Algebraisches Denken: Eine Grundlegung	1
1.1	Muster und Strukturen	2
1.1.1	Sichtbare Muster und unsichtbare Strukturen	5
1.1.2	Muster als Türöffner zu Strukturen	13
1.2	Algebraisches Denken: Muster entdecken – Strukturen verstehen	15
1.3	Denkschritte vom Muster zur Struktur: Begriffe und Theorien	19
1.4	Exemplarische Entwicklungsmodelle für algebraisches Denken	29
2	Muster und Strukturen als Grundideen algebraischen Denkens	37
2.1	Grundideen algebraischen Denkens in Forschungsbefunden	40
2.2	Grundideen algebraischen Denkens in Lehrplänen und Standards	47
2.2.1	Internationale Lehrpläne und Standards: Exemplarische Einblicke	48
2.2.2	Nationale Lehrpläne und Standards: Exemplarische Einblicke	52
2.3	Grundideen algebraischen Denkens im Arithmetikunterricht	58
2.3.1	Arithmetisches Denken – Algebraisches Denken	58
2.3.2	Grundideen als Perspektiven auf Aufgaben: Ein Beispiel	62
2.3.3	Grundideen algebraischen Denkens	65
2.4	Bedeutung der Förderung algebraischen Denkens in der Grundschule	70
3	Algebraisch kommunizieren, darstellen, argumentieren	77
3.1	Algebraisch kommunizieren und darstellen	78
3.1.1	Algebraische Perspektive auf das Kommunizieren	79
3.1.2	Algebraische Perspektive auf das Darstellen	83
3.2	Verallgemeinern als zentraler algebraischer Prozess	88
3.2.1	Sprachliche Mittel beim Verallgemeinern	88
3.2.2	Die Rolle des Verallgemeinerens beim Argumentieren	91
3.2.3	Verallgemeinerungen mit dem Fokus auf Muster oder auf Strukturen	93

- 3.3 Algebraisch argumentieren 96
 - 3.3.1 Argumentieren und erklären: Eine Differenzierung 97
 - 3.3.2 Empirische und strukturelle Argumente 100
 - 3.3.3 Begründungen von Strukturen oder anhand von Strukturen 103
 - 3.3.4 Operative Beweise 105
- 3.4 Variablen beim Kommunizieren, Darstellen und Argumentieren 108
 - 3.4.1 Variablen: Bedeutung und Rolle in der Algebra 110
 - 3.4.2 Symbolische Darstellungen von Variablen 115
- 4 **Algebraisches Denken anregen** 123
 - 4.1 Aufgabendesign für algebraische Lernanlässe 125
 - 4.1.1 Aufgaben verändern. 126
 - 4.1.2 Strukturierte Übungsformate 128
 - 4.1.3 Bildimpulse und Darstellungswechsel. 136
 - 4.1.4 Produktive Irritationen. 137
 - 4.1.5 Aufgaben mit diagnostischem Potenzial 140
 - 4.2 Unterrichtsgestaltung für algebraische Lernanlässe 142
 - 4.2.1 Erkennen 143
 - 4.2.2 Fortsetzen. 145
 - 4.2.3 Beschreiben 146
 - 4.2.4 Begründen 150
 - 4.3 Unterrichtsinteraktion und Diskursanregungen 153
- 5 **Zahlen erforschen** 159
 - 5.1 Additive Zerlegbarkeit von Zahlen 166
 - 5.2 Ordnungseigenschaft von Zahlen 175
 - 5.3 Teilbarkeit (multiplikative Zerlegbarkeit) von Zahlen 181
 - 5.4 Teilbarkeit durch 2 im Fokus: Parität 187
 - 5.5 Primzahlen als multiplikative Bausteine der Zahlen 191
 - 5.6 Figuriertheit von Zahlen 194
 - 5.7 Zahlen im dezimalen Stellenwertsystem 198
- 6 **Rechenoperationen erforschen** 207
 - 6.1 Kommutativität 210
 - 6.1.1 Kommutativität der Addition 211
 - 6.1.2 Kommutativität der Multiplikation 213
 - 6.2 Assoziativität 218
 - 6.2.1 Assoziativität der Addition 220
 - 6.2.2 Assoziativität der Multiplikation 225
 - 6.3 Distributivität 227
 - 6.4 Reversibilität (Umkehrbarkeit) 231
 - 6.5 Neutrale Elemente 237
 - 6.6 Konstanzigenschaften 240

6.6.1	Konstanz der Summe	241
6.6.2	Konstanz der Differenz	242
6.6.3	Konstanz des Produkts	245
6.6.4	Konstanz des Quotienten	246
7	Gleichungen erforschen	249
7.1	Gleichheit, Gleichwertigkeit und Äquivalenz: Eine Begriffsklärung	250
7.2	Gleichwertigkeit als mathematische Beziehung	256
7.3	Gleichwertigkeit von Zahlen	265
7.3.1	Eine Zahl in zwei verschiedenen Termdarstellungen	270
7.3.2	Eine Zahl in Term- und Verbalдарstellung	273
7.3.3	Eine Zahl in zwei verschiedenen anschaulichen Darstellungen	276
7.4	Gleichwertigkeit von Rechenhandlungen	279
7.4.1	Aufgabenduette	280
7.4.2	Äquivalente Umformungen	287
7.5	Gleichheitsbeziehungen mit mehreren Variablen	291
7.6	Gleichungen und schöne Päckchen	298
8	Funktionen erforschen	303
8.1	Einmaleinsreihen	309
8.2	Zahlenfolgen	312
8.3	Zahlenpaare	316
8.4	Figurenfolgen	326
8.5	Figurierte Zahlen als besondere Figurenfolgen	340
8.6	Sich wiederholende Musterfolgen	343
8.7	Besondere Zahlenfolgen: Fibonacci & Co.	347
	Literatur	351