

Ruben V. Ambartzumjan
Joseph Mecke
Dietrich Stoyan

Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Stochastische Geometrie

Herausgegeben von
Werner Nagel



Akademie Verlag

Inhalt

Teil 1 (Ruben V. Ambartzumjan)

Einleitung	13
1 Das Cavalieri-Prinzip und andere vorbereitende Aussagen	16
1.1 Das Cavalieri-Prinzip	16
1.2 Die Lebesguesche Faktorisierung	18
1.3 Die Haarsche Faktorisierung	19
1.4 Weitere Bemerkungen über Maße	23
1.5 Einige topologische Bemerkungen	24
1.6 Parametrische Transformationen	27
1.7 Metriken und Konvexität	29
1.8 Modifikationen des Crofton-Theorems	32
2 Translationsinvariante Maße	34
2.1 Der Raum \bar{G} der orientierten Geraden im \mathbb{R}^2	34
2.2 Der Raum G der (nicht-orientierten) Geraden im \mathbb{R}^2	35
2.3 Der Raum \bar{E} der orientierten Ebenen im \mathbb{R}^3	36
2.4 Der Raum E der Ebenen im \mathbb{R}^3	37
2.5 Der Raum $\bar{\Gamma}$ der orientierten Geraden im \mathbb{R}^3	38
2.6 Der Raum Γ der (nicht-orientierten) Geraden im \mathbb{R}^3	38
2.7 Der Übergang zu Produkträumen	39
2.8 Die Faktorisierung von Maßen auf geschlitzten Räumen	42
2.9 Räume, die nicht geschlitzt sind	43
2.10 Richtungs- und Schnitzzahlrosen	44
2.11 Dichte und Krümmung	45
2.12 Rosen T_3 -invarianter Maße auf E	46
2.13 Räume von Strecken und von Scheiben	49
2.14 Produkte von geschlitzten Räumen	50
2.15 Fast sichere T -Invarianz zufälliger Maße	52
2.16 Zufällige Maße auf \bar{G}	52
2.17 Zufällige Maße auf \bar{E}	54
2.18 Zufällige Maße auf $\bar{\Gamma}$	55

3	Maße, die gegenüber euklidischen Bewegungen invariant sind	57
3.1	Die Drehgruppe des \mathbb{R}^2	57
3.2	Drehungen im \mathbb{R}^3	58
3.3	Das Haarsche Maß auf W_3	59
3.4	Großkreise auf der Sphäre	60
3.5	Die Invarianz der Haarschen Maße auf euklidischen Gruppen	60
3.6	Das invariante Maß auf \tilde{G} und G	61
3.7	Die Gestalt von dg bei zwei anderen Parametrisierungen der Geraden	62
3.8	Andere Parametrisierungen der Großkreise auf der Sphäre	64
3.9	Das invariante Maß auf $\tilde{\Gamma}$ und Γ	64
3.10	Andere Parametrisierungen von Geraden in \mathbb{R}^3	65
3.11	Das invariante Maß auf den Räumen \tilde{E} und E	66
3.12	Andere Parametrisierungen der Ebenen in \mathbb{R}^3	66
3.13	Das kinematische Maß	68
3.14	Faktorisierungen nach der Lage und der Größe	70
3.15	Faktorisierung nach der Lage und der Form	72
3.16	Faktorisierungen nach Lage, Größe und Form	73
3.17	Über Maße auf Räumen von Formen	78
3.18	Die sphärische Topologie auf Σ	80
4	Haarsche Maße auf Gruppen affiner Abbildungen	82
4.1	Die Gruppe \mathbf{A}_2^0 und ihre Untergruppen	82
4.2	Affine Deformationen des \mathbb{R}^2	84
4.3	Das Haarsche Maß auf \mathbf{A}_2^0	85
4.4	Das Haarsche Maß auf \mathbf{A}_2	87
4.5	Punktetripel im \mathbb{R}^2	88
4.6	Eine andere Darstellung von $d^{(r)}\nabla$	89
4.7	Quadrupel von Punkten im \mathbb{R}^2	90
4.8	Eine Aufgabe vom Sylvester-Typ für vier Punkte in \mathbb{R}^2	92
4.9	Die Gruppe \mathbf{A}_3^0 und ihre Untergruppen	94
4.10	Die Gruppe der affinen Deformationen des \mathbb{R}^3	96
4.11	Haarsche Maße auf \mathbf{A}_3^0 und \mathbf{A}_3	97
4.12	∇_3 -invariante Maße auf dem Raum der Tetraederformen	98
4.13	Fünftupel von Punkten im \mathbb{R}^3	99
4.14	Affine Formen von Fünftupeln im \mathbb{R}^3	99
4.15	Ein allgemeiner Satz	101
4.16	Die elliptische Ebene als Raum der affinen Formen	103
5	Kombinatorische Integralgeometrie	106
5.1	Die Radonschen Ringe in \tilde{G} und in G	106
5.2	Eine Folgerung aus dem Crofton-Theorem	108
5.3	Ein topologischer Zugang und der Satz von Gauss-Bonnet	109

5.4	Zwei Beispiele	114
5.5	Ringe in E	117
5.6	Ebenen, die ein konvexes Polyeder schneiden	119
5.7	Die Rekonstruktion eines Maßes aus der Keilfunktion	120
5.8	Die Keilfunktion für T_3 -invariante Maße	122
5.9	Die Fahnendarstellung konvexer Körper	123
5.10	Fahnendarstellungen und Zonoide	126
5.11	Ebenen im \mathbb{R}^3 , die einen konvexen Körper mit glattem Rand schneiden	127
5.12	Andere Teilgebiete und historische Bemerkungen	129
6	Grundintegrale	133
6.1	Integrale der Anzahl von Schnitten	133
6.2	Die Zonoidgleichung	136
6.3	Integration des Lebesgue-Maßes von Schnitten	137
6.4	Vertikale Fenster und Translationsinvarianz	139
6.5	Vertikale Fenster und Paare nichtparalleler Geraden	139
6.6	Translative Analyse von Realisierungen	142
6.7	Integrale über Produkträumen	146
6.8	Kinematische Analyse von Realisierungen	149
6.9	Die Pleijelsche Identität	158
6.10	Sehnen konvexer Polygone	161
6.11	Integralfunktionen für Maße auf dem Raum der Dreiecksformen	162
7	Zufällige Punktprozesse	165
7.1	Punktprozesse	165
7.2	k -Untermengen eines Intervalls auf der Geraden	167
7.3	Endliche Mengen auf $[a, b)$	170
7.4	Konsistente Familien	172
7.5	Geometrische Prozesse	173
7.6	Das Beispiel von Shepp	175
7.7	Invariante Modelle	176
7.8	Zufällige Verschiebungen eines Gitters	177
7.9	Zufällige Bewegungen eines Gitters	178
7.10	Gitter zufälliger Form und Lage	179
7.11	Der Geradenprozeß von Kallenberg-Mecke-Kingman	181
7.12	Markierte Punktprozesse, der Fall unabhängiger Marken	183
7.13	Streckenprozesse und zufällige Mosaike	187
7.14	Momentenmaße	189
7.15	Integration im Raum der Realisierungen	194

8 Die Palmsche Verteilung von Punktprozessen in \mathbb{R}^n	201
8.1 Die Verteilung der typischen Marke	201
8.2 Reduktion auf die Berechnung von Intensitäten	203
8.3 Der Raum der zentrierten Realisierungen	203
8.4 Die Palmsche Verteilung	205
8.5 Eine Stetigkeitsvoraussetzung	205
8.6 Einige Beispiele	206
8.7 Die Palmschen Formeln im eindimensionalen Fall	208
8.8 Der Fall mehrerer Intervalle	209
8.9 T_1 -invariante Erneuerungsprozesse	210
8.10 Palmsche Formeln für Kugeln in \mathbb{R}^n	215
8.11 Die Gleichung $\Pi = \Theta * P$	215
8.12 Asymptotisch Poissonsche Verteilungen	217
9 Typische Konfigurationen in Poissonschen Prozessen	219
9.1 Die relative Palmsche Verteilung	219
9.2 Beispiele der Zuordnung von Punktprozessen auf Gruppen	221
9.3 Das typische Polygon im Poissonschen Geradenmonmosaik; der Fall gleicher Gewichte	223
9.4 Lösung	224
9.5 Herleitung der Grundgleichung	225
9.6 Auswahl mit ungleichen Gewichten	227
9.7 Der Fall unendlicher Intensität	230
9.8 Verdünnungen erzeugen Wahrscheinlichkeitsverteilungen	231
9.9 Simplexes in Poissonschen Punktprozessen im \mathbb{R}^n	234
9.10 Voronoi-Mosaik	236
9.11 Mittelwerte für zufällige Polygone	238
10 Schnitte geometrischer Prozesse in der Ebene	243
10.1 Palmsche Verteilungen für Geradenprozesse in \mathbb{R}^2	243
10.2 Die Palmschen Formeln für Geradenprozesse	246
10.3 Geradenprozesse zweiter Ordnung	247
10.4 Integration einer kombinatorischen Zerlegung	253
10.5 Weitere Bemerkungen über Geradenprozesse	258
10.6 Verallgemeinerung auf zufällige Mosaik	260
10.7 Boolesche Modelle für Prozesse von Kreisen	262
10.8 Die Exponentialverteilung der Länge des typischen weißen Intervalls	267
Literatur zu Teil 1	269
Symbolverzeichnis zu Teil 1	273

Teil 2 (Joseph Mecke / Dietrich Stoyan)

Einleitung	275
1 Mathematische Grundlagen	278
1.1 Einige Grundbegriffe der Mengenlehre	278
1.2 Spezielle Mengenoperationen im \mathbb{R}^d	279
1.3 Topologie im \mathbb{R}^d	280
1.4 Euklidische Bewegungen	281
1.5 Konvexe Mengen im \mathbb{R}^d	281
1.6 Maß- und Integrationstheorie	285
1.7 Beschreibung geometrischer Strukturen	288
2 Zufällige abgeschlossene Mengen	290
2.1 Grundlagen	290
2.2 Kenngrößen für zufällige abgeschlossene Mengen	293
2.3 Statistik für zufällige abgeschlossene Mengen	296
2.4 Bemerkungen zu der quantitativen Bildauswertung	299
3 Punktprozesse (Zufällige Punktfelder)	302
3.1 Grundbegriffe und -eigenschaften	302
3.2 Momentenmaße und verwandte Größen	306
3.3 Palmsche Verteilungen	309
3.4 Beschreibung des 2. Momentenmaßes	312
3.5 Operationen mit Punktprozessen	314
3.6 Statistik für stationäre Punktprozesse	316
4 Zufällige Maße	321
4.1 Vorbemerkungen	321
4.2 Definitionen und Beispiele	321
4.3 Laplace-Funktional	323
4.4 Momentenmaße	324
5 Das Boolesche Modell	327
5.1 Grundeigenschaften und Beispiele	327
5.2 Formeln für das Boolesche Modell mit konvexen Körnern	332
5.3 Statistik für das Boolesche Modell	334
5.4 Verallgemeinerungen des Booleschen Modells	335
6 Punktprozeßmodelle	337
6.1 Poisson-Prozesse	337
6.1.1 Der stationäre Poisson-Prozeß	337
6.1.2 Allgemeine Poisson-Prozesse	340

6.1.3	Operationen mit Poisson-Prozessen	341
6.1.4	Statistik für den stationären Poisson-Prozeß	342
6.2	Weitere Punktprozeßmodelle	346
6.2.1	Coxsche oder doppelt stochastische Poisson-Prozesse	346
6.2.2	Der Neyman-Scott-Prozeß	347
6.2.3	Ein Hard-Core-Punktprozeß	348
6.2.4	Ein Modell für endliche Punktsysteme	351
7	Zufällige linienförmige Strukturen	353
7.1	Vorbemerkungen	353
7.2	Geraden in der Ebene	354
7.3	Definition der Geradenprozesse (zufällige Geradenfelder)	355
7.4	Stationäre Geradenprozesse	356
7.5	Schnitte von Geradenprozessen	357
7.6	Bemerkung über Faserprozesse (zufällige Faserfelder)	358
8	Zufällige Mosaik	361
8.1	Vorbemerkungen	361
8.2	Ebene stationäre zufällige Mosaik	361
8.3	Beziehungen zwischen den Mittelwerten	363
8.4	Ebenes Poisson-Voronoi-Mosaik	364
8.5	Poissonsches Geradenmosaik	365
8.6	Stationäre zufällige räumliche Mosaik	366
9	Stereologie	371
9.1	Vorbemerkungen	371
9.2	Mittelwertformeln	372
9.3	Stereologische Formeln für Keim-Korn-Modelle	373
9.4	Stereologische Formeln für Kugelkollektive	375
9.5	Einige weitere Probleme und Ergebnisse der Stereologie	382
	Literatur zu Teil 2	385
	Symbolverzeichnis zu Teil 2	394
	Sachwortverzeichnis	396